ATELIER 7 : DIDACTIQUE DE L'ANALYSE ET DES MATHÉMATIQUES DE NIVEAU POST-OBLIGATOIRE

Laurent VIVIER *, Patrick FRETIGNE**, Imène GHEDAMSI***, Asuman OKTAÇ ****

Institution(s) des coordinateurs *:LDAR, Université Paris Diderot (France) **:Université de Rouen, Commission Inter-IREM Université ***:IPEIT, Université de Tunis (Tunisie) ****:CINVESTAV-IPN (Mexique)

L'analyse et plus généralement les mathématiques universitaires ou pré-universitaires constituent des thèmes qui ont été étudiés en didactique depuis plusieurs décennies notamment à travers le courant de recherche Advanced Mathematical Thinking. Ces recherches, intéressants de nombreux chercheurs au niveau mondial, se sont appuyées sur diverses approches théoriques. L'atelier s'inscrit dans cette perspective mais au lieu de retracer l'histoire de ces recherches il prend appui sur la citation suivante de Michèle Artigue[1] :

> Tout autant que la progression dans des niveaux croissants d'abstraction, la progression dans la connexion entre contextes, cadres, registres sémiotiques… essentielle à l'apprentissage, est délicate et doit être organisée dans la durée par l'enseignement.

Michèle Artigue précise que les recherches en didactique des mathématiques avancées se sont surtout intéressées à la progression dans des niveaux croissants d'abstraction mais que depuis les années 2000 de nouvelles voies de recherches se sont développées dans des perspectives de connexion ou de flexibilité. Nous prenons ces termes de connexion et de flexibilité dans un sens très large d'une relation établie entre deux ou plusieurs composantes, pour rendre l'atelier le plus ouvert quant aux contributions.

Concernant les thèmes mathématiques, l'atelier privilégie la didactique de l'algèbre et de l'analyse qui sont, quel que soit le pays concerné, les deux piliers de l'enseignement des mathématiques post-obligatoires.

On peut ainsi proposer plusieurs types de contributions comme la liste, non exhaustive, suivante en donne une idée :

- l'étude d'une situation faisant intervenir l'algèbre et l'analyse (par exemple les équations différentielles linéaires),

- une étude faisant intervenir plusieurs cadres ou plusieurs registres,

- une étude faisant intervenir plusieurs disciplines (modélisation mathématique de situations provenant d'autres sciences),

[1] ARTIGUE, M. (2006). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 11, p. 269-288, IREM de Strasbourg.

- une étude faisant intervenir plusieurs contextes (une étude comparative à une échelle internationale ou encore une étude entre, pour prendre un exemple français, l'université et les classes préparatoires aux grandes écoles).

On pourrait également penser à une modélisation du monde réel ou encore l'utilisation des nouvelles technologies.

Si les recherches en didactiques des mathématiques constituent le cœur de l'atelier, des expériences d'enseignement sont également attendues.

Taller 7 – Didáctica del análisis y de las matemáticas del nivel post-obligatorio

El análisis, y más generalmente las matemáticas universitarias o pre-universitarias constituyen temas que han sido estudiados en la didáctica desde hace varias décadas, notablemente a través del corriente de investigación *Advanced Mathematical Thinking*. Estas investigaciones, que interesaron a numerosos investigadores a nivel mundial, se apoyan sobre diversas aproximaciones teóricas. El taller se ubica dentro de esta perspectiva, sin embargo en lugar de trazar la historia de dichas investigaciones, se apoya en la siguiente cita de Michèle Artigue[1] :

Al igual que la progresión en los niveles crecientes de abstracción, la progresión en la conexión entre contextos, marcos, registros semióticos... esencial para el aprendizaje, es delicada y debe ser organizada de forma continua por la enseñanza.

Michèle Artigue precisa que las investigaciones en la didáctica de las matemáticas avanzadas se interesan sobre todo por *la progresión en los niveles crecientes de abstracción*, pero que desde los años 2000 nuevas vías de investigación se han desarrollado dentro de las perspectivas de conexión y de flexibilidad. Nosotros consideramos los términos de *conexión* y *flexibilidad* en un sentido muy grande, de una relación establecida entre dos o varios componentes, con el fin de hacer el taller lo más abierto posible en cuanto a las contribuciones.

Respecto a los temas matemáticos, el taller privilegia la didáctica del álgebra y del análisis, los cuales son, sin importar el país, los dos pilares de enseñanza de las matemáticas post-obligatorias.

De esta manera se puede proponer varios tipos de contribuciones, como la lista siguiente, no exhaustiva, da una idea :

- un estudio de una situación donde intervienen el álgebra y el análisis (por ejemplo las ecuaciones diferenciales lineales),

- un estudio donde intervienen varios marcos o registros,

- un estudio donde intervienen varias disciplinas (modelización matemática de situaciones provenientes de otras ciencias),

- un estudio donde intervienen varios contextos (un estudio comparativo de una escala internacional o bien un estudio entre, para tomar un ejemplo francés, la universidad y las clases de preparatoria en las *grandes écoles*).

Igualmente se puede pensar en una modelización del mundo real o bien la utilización de nuevas tecnologías.

Si bien las investigaciones en la didáctica de las matemáticas constituyen el corazón del taller, experiencias de enseñanza también serán atendidas.

Workshop 7 – Didactics of analysis and of tertiary level mathematics

Analysis and more generally, tertiary level mathematics is one of the main topics that mathematics education has been studying for many decades, especially through research trends called "Advanced Mathematical Thinking". Involving many researchers all around the world, these research studies are based on various theoretical approaches. This workshop is based on that point of view, but instead of recounting this research's history, the workshop adopts Michèle Artigue's position[1]:

As much as the progression in increasing levels of abstraction, the progression is in the connection between contexts, structures and semiotics registers... which is an important part of the learning process, is complicated and has to be organized in a long-term teaching process.

Michèle Artigue points out that didactic research studies in advanced mathematics taks an interest in the progression in increasing levels of abstraction, but since the 2000's, new research trends focus on connection or flexibility prospects. We use the terms connection and flexibility in the weak sense of an evidenced relation between two or more components, to leave this workshop open to any contribution.

Regarding mathematical subjects, the workshop privileges math education research in algebra and analysis, which are the main topics at tertiary level in mathematics everywhere in the world.

We suggest contributions based upon several kinds of studies, as in the non-exhaustive following list:

- a study where algebra and analysis take part in a case (linear differential equations, for instance),

- a study where many settings or many registers are involved,

- a study with many subjects (mathematical modelling of situations coming from other scientific fields),

- a study with several contexts (an international comparative study, or a comparison in a national context, like for instance in France a study between University and 'classes prépa').

Studies about modelling real world's situation or about the use of digital technologies at advanced level are also welcome.

While research studies in mathematics education are the main focus the workshop, we are also expecting reports and reflective analysis on teaching experiments.

LISTE DES CONTRIBUTIONS POUR L'ATELIER 7

Del aula al cotidiano: un programa de modelación para la enseñanza de la matemática : Francisco CORDERO OSORIO, CINVESTAV – IPN, México ; Alin Andrei CARSTEANU, ESFM – IPN, México.

Les stratégies de futurs instituteurs dans la résolution des tâches de fonction. Approche ponctuelle ou approche coordonnée ? : Athanasios GAGATSIS, Université de Chypre ; Annita MONOYIOU, Université de Chypre ; Paraskevi MICHAEL, Université de Chypre.

L'enseignement des fonctions à la transition-collège-lycée à Chypre : Athanasios GAGATSIS, Université de Chypre ; Andreas PHILIPPOU, Université de Chypre ; Paraskevi MICHAEL, Université de Chypre.

The learning of series: some consequences of institutional choices : Alejandro S. GONZÁLEZ-MARTÍN, Université de Montréal (Canada).

An eclectic approach to the teaching of calculus : Michel HELFGOTT, East Tennessee State University.

Using counterexamples in teaching & learning of calculus : Sergiy KLYMCHUK, Auckland University of Technology ; Tatyana ZVERKOVA, Odessa National University.

Variables y parámetros : Maria Eugenia MARMOLEJO RIVAS, Cinvestav-IPN, México D. F ; François PLUVINAGE, Cinvestav-IPN, México D. F.

Des aspects de rupture dans la transition Secondaire/Supérieur en mathématiques : Ridha NAJAR, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue.

Establishing synergy between mathematicians and mathematics educators: the case of teaching and learning the concept of limit : Elena NARDI, University of East Anglia (Norwich, UK).

"Intégrale, longueur, aire" de Henri Lebesgue: traduction critique, analyse herméneutique et contexte historique-mathématique : Sílvio César OTERO-GARCIA, l'Université d'État de São Paulo (PPGEM/UNESP – Rio Claro) – Brésil.

Concepciones sobre los números reales en estudiantes de primer semestre de universidad : Rosa Elvira PÁEZ MURILLO, Universidad Autónoma de la Ciudad de México ; Laurent VIVIER, LDAR, Université Paris Diderot ; Emigdio MARTÍNEZ OJEDA, Universidad Autónoma de la Ciudad de México ; Carlos Alberto TORRES MARTÍNEZ, Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Modelos intuitivos sobre el concepto de transformación lineal : Osiel RAMÍREZ SANDOVAL, CINVESTAV-IPN ; Asuman OKTAÇ, CINVESTAV-IPN.

Actividades basadas en modelación matemática : Avenilde ROMO VÁZQUEZ, CICATA-IPN ; Elizabeth MONTOYA DELGADILLO, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Popularization and mathematics education : José Francisco RODRIGUES, University of Lisbon, Portugal ; Jaime CARVALHO E SILVA, University of Coimbra, Portugal.

Interfaces éducatives entre mathématiques et industrie. Une étude soutenue par Michèle Artigue : Rudolf STRÄßER, Justus-Liebig-Universitaet Giessen, Allemagne ; José Francisco RODRIGUES, Universidade de Lisboa, Portugal .

Análisis teórico de conceptos del álgebra lineal y su uso didáctico apoyado en situaciones de modelación : María TRIGUEROS, ITAM – México ; Asuman OKTAÇ, CINVESTAV – México.

Accompagner la transition secondaire-supérieur : le cas des nombres complexes : Martine De VLEESCHOUWER, Unité de support didactique, Université de Namur ; Ghislaine GUEUDET, CREAD, IUFM de Bretagne UBO ; Marie-Pierre LEBAUD, CREAD, Université de Rennes 1.

DEL AULA AL COTIDIANO: UN PROGRAMA DE MODELACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Francisco Cordero Osorio* y Alin Andrei Carsteanu**

*CINVESTAV – IPN, México **ESFM – IPN, México

Palabras claves. *Modelación matemática, resignificación, función social de la matemática.*

Del aula al cotidiano, significa que los modelos educativos, en general, no han logrado relacionar estos dos aspectos. Lo que sucede en uno no sucede en el otro. En particular, si se piensa en la matemática del aula, ésta es diferente a la matemática que sucede en el cotidiano. Para conformar un estatus epistemológico que rinda cuentas del conocimiento matemático con relación en estos dos aspectos, se requiere ubicar una dimensión social que problematice la relación de los dominios de la ciencia y de la vida cotidiana. Abordar dicho propósito requiere entender al conocimiento matemático como una construcción social, lo que conlleva cuestionar no en sí a la matemática, sino su función social (Cordero, 2006). Por eso importan conceptos entorno al conocimiento como su institucionalización, sus usos e instrumentos, sus prácticas sociales que norman sus construcciones, el cotidiano, la labor, el trabajo y las acciones humanas, como la identidad, entre otros. En ese mismo sentido la modelación en la matemática escolar tiene que ser algo más robusto que una representación o una aplicación matemática, tiene que ser una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión. Esto es, la modelación es el uso del conocimiento matemático en una situación específica, en donde se debate entre la función y la forma, de ese conocimiento, de acorde con lo que organizan los participantes. A este último se le llama resignificación. Así, la modelación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón deseable. Lo que significa que es, por un lado, un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. Por el otro lado, es una práctica que trasciende y se resignifica, que transforma al objeto en cuestión. Tal práctica es la que se tendrá que desarrollar en el sistema educativo.

METODOLOGÍA

La hipótesis de trabajo consiste en considerar a la práctica social como la fuente de la reorganización de la obra matemática y del rediseño de la matemática escolar. Esta formulación creará una nueva base de entendimientos y construcciones donde la fuente de abstracción se encuentra en un ámbito de las prácticas. Las categorías tendrán un carácter funcional del conocimiento matemático, de ahí la importancia del cotidiano. Esto es, una vez que se identifiquen las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático requieren ser reinterpretadas para ser integradas al sistema didáctico, pues requieren de la intencionalidad para que se desarrollen en las condiciones del sistema. Para ello, se construye la situación donde la práctica se transforma en el argumento, como el eje o núcleo para generar el conocimiento matemático que responda a la situación. Se requiere de la construcción de un Programa de Modelación para la Enseñanza de la Matemática, permanente y sistemático que deberá tener como base constructos teóricos que permitan resignificar acciones como las siguientes: hacer del programa un marco de referencia para los docentes en matemáticas; favorecer la intención de incorporar el conocimiento matemático en el cotidiano del ciudadano; operar el programa en forma itinerante, no solo en el aula sino fuera de ella. Toda temática disciplinar necesariamente, en mayor o menor medida, para su desarrollo, tiene que cruzar tanto el eje epistemológico, como el científico y el social. En algún sentido, cualquier aspecto temático puede ubicarse en el espacio tridimensional compuesto por los ejes mencionados: organización, obra y funcionalidad (Cordero Osorio y otros, 2009). Los considerandos de la línea de investigación ponen en el escenario de la Matemática Educativa el rol de la justificación funcional, la cual presume de interactuar, de manera natural, con las realidades que construye el ciudadano. Así, brinda un enfoque que concibe al conocimiento construyéndose a la par de la experiencia del humano, que permite entender que el conocimiento se construye y que el marco teórico de la investigación admita discusiones sobre su verificabilidad o su falsabilidad (Bribiesca y Merino, 2008). La vida cotidiana se presenta como una realidad interpretada por los hombres y mujeres, y para ellos tiene el significado subjetivo de un mundo coherente que comparte con otros. Se origina en sus pensamientos y acciones, y está sustentado como real por éstos. Por lo cual, lo cotidiano se organiza alrededor del "aquí y ahora" por los miembros de la sociedad. Es decir, lo cotidiano surge de lo que se hace, se ha hecho o lo que se piensa hacer en dicha sociedad (Berger y Luckmann, 2006). Además, es un constructo teorico para hacer notar lo externo al dominio científico. De ahí la necesidad de establecer marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático, expresados en diseños de situación específicos que ponen en juego la dualidad de la matemática escolar: las justificaciones racionales y funcionales. En ese sentido la injerencia en el sistema educativo está en el rediseño del discurso matemático escolar.

RESULTADOS ESPERADOS

Aclaración del estatus epistemológico de la funcionalidad del conocimiento en una situación específica. Diseños y puestas en escena de situaciones de enseñanza para manifestar el conocimiento matemático con una intencionalidad no necesariamente científica: el cotidiano. Explicación de ciertos contenidos matemáticos en su dimensión funcional y razonada, así como en la alternancia de saberes que la misma modelación y tecnología propicia. Temas de estudio a nivel detallado: La producción científica en el cotidiano; Estudio comparativo entre el saber funcional y el saber matemático; La modelación del movimiento, de fluidos y de comportamientos biológicos: la variación y la estabilidad en el cotidiano; El rol de la funcionalidad de las gráficas. Cada uno de estos temas se empeña en entender, en situaciones específicas, las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social, en forma sistémica, de la función de las relaciones posibles entre el dominio científico y la sociedad. Se requieren modelos de apredizajes permanantes y funcionales. En el mejor de los casos sabemos cómo se construye un conocimiento matemático en el aula, en la lógica misma del dominio matemático, pero no sabemos cómo se usa en otras profesiones ni en la gente común. El mecanismo de difusión, el significado y la función de difundir conocimiento científico requieren ser objetos de estudio que permitan regular los programas e iniciativas de difusión. Se requiere de constructos teóricos que vigilen la pertinencia de los diseños de situación de modelación. Para que se logre todo ello, se requiere del trabajo sistemático disciplinar que conlleva la producción científica.

REFERENCIAS

Berger, P. y Luckman, T. (2006). La construcción social de la realidad. Buenos Aires: Amorrortu.

Bribiesca, L. y Merino, G. (2008). Teorías, modelos y paradigmas en la investigación científica. *Ciencia,* 59(2).

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica,* **20**(1), 59-79.

Cordero Osorio, F., Suárez Téllez, L., Mena Lorca, J., Arrieta Vera, J., Rodríguez Gallegos, R., Romo Vázquez, A., Cârsteanu, A., Solís Esquinca M. (2009). La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, **22**, 1717-1726.

LES STRATÉGIES DE FUTURS INSTITUTEURS DANS LA RÉSOLUTION DES TÂCHES DE FONCTION. APPROCHE PONCTUELLE OU APPROCHE COORDONNÉE?

Athanasios Gagatsis, Annita Monoyiou et Paraskevi Michael

Université de Chypre

Mots-clés. *Fonction, futurs instituteurs, approche ponctuelle, approche coordonnée*

INTRODUCTION

Les étudiants de l'enseignement secondaire voir même de l'enseignement supérieur, quelque soit le pays, ont des difficultés à conceptualiser la notion de fonction. (Sierpinska, 1992 ; Vandebrouck, 2011). Un facteur qui influence l'apprentissage des fonctions réside dans la diversité des représentations liées à ce concept (Hitt, 1998). Etant donné que chaque représentation possède différents avantages, l'utilisation de différentes représentations pour la même situation mathématique constitue le noyau de la compréhension mathématique (Duval, 2002). Le point de vue théorique utilisé dans cette étude est principalement fondé sur les études de Even (1998), et Monoyiou et Gagatsis (2008) selon lesquelles beaucoup d'élèves traitent les fonctions de manière ponctuelle mais ils ne peuvent pas réfléchir sur une fonction d'une manière globale.

LA RECHERCHE

Le but de cette recherche est de contribuer à la compréhension des approches ponctuelle et coordonnée que les étudiants-futures instituteurs- développent. Le concept de fonction est abordé selon deux perspectives différentes, la perspective ponctuelle- la fonction en tant que processus et la perspective coordonnée– la fonction en tant qu'entité. Selon la première une fonction est perçue comme la transition entre des valeurs x et y : pour chaque valeur de x, la fonction possède une valeur y correspondante. Selon la seconde la fonction est pensée d'un point de vue local et global en même temps. Les étudiants peuvent «coordonner» deux systèmes de représentation, l'algébrique et la graphique. L'étude a été conduite en trois phases et 548 étudiants du Département de l'Education de l'Université de Chypre y ont participé. Un test constitué de sept tâches a été appliqué à tous les participants (Monoyiou & Gagatsis, 2008). Les quatre premières tâches étaient de simples tâches sur les fonctions. Dans chaque tâche se trouvaient deux fonctions linéaires ou quadratiques. Chaque fonction était en forme algébrique et une d'elle était accompagnée d'une représentation graphique. Il y avait toujours une relation entre les deux fonctions (e.g. $f(x)=2x$, $g(x)=2x+1$). Il était demandé aux étudiants d'interpréter graphiquement la seconde fonction. Ces quatre tâches ont été codifiés en un T majuscule (tâche) suivi par une lettre qui indique la manière avec laquelle les professeurs ont résolu la tâche : «a» pour marquer une «approche ponctuelle» et «c» pour marquer une «approche coordonnée» (T1a, T1c, T2a, T2c, T3a, T3c, T4a and T4c). Une solution est reconnue comme «ponctuelle» si les participants procédaient à la construction du graph de la deuxième fonction en trouvant les valeurs correspondantes pour x et y et n'utilisaient pas les informations offertes par le graph de la première fonction. Au contraire, une solution est reconnue comme «coordonnée» si les étudiants observaient et utilisaient la relation entre les deux fonctions dans la construction du graph de la deuxième fonction. Dans ce cas, les étudiants utilisaient et combinaient les deux types de représentation. Ils ont relevé la relation entre les deux équations données et l'ont interprétée graphiquement en manipulant la fonction comme une entité. Les autres trois tâches étaient des problèmes verbaux (Pr1a, Pr1b, Pr1c, Pr2a, Pr2b et Pr3). Figure 1 présente le diagramme de similarité de la première phase de la recherche (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000).

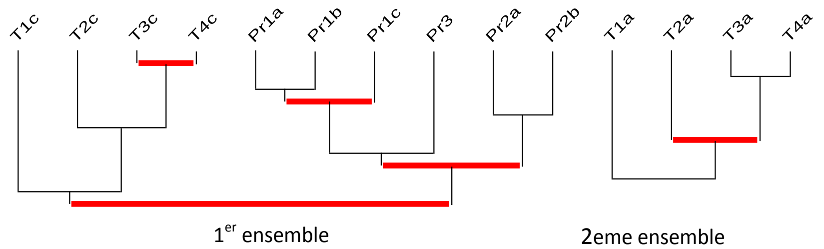


Figure 1 : Diagramme de similitude des réponses des élèves-professeurs participant à la phase A.

A partir du diagramme de similitude, il peut être observé que le premier groupe inclut les variables correspondant à la résolution des problèmes verbaux et les variables représentant l'approche coordonnée (T1c, T2c, T3c, T4c, Pr1a, Pr1b, Pr1c, Pr2a, Pr2b et Pr3). Le deuxième groupe est consisté des variables T1a, T2a, T3a and T4a qui représentent l'utilisation faite de l'approche algébrique.

Plus particulièrement, l'approche coordonnée des étudiants sur les simples tâches de fonctions est lié étroitement à l'efficacité dans la résolution des problèmes. Cette étroite connexion peut indiquer que les étudiants qui peuvent utiliser efficacement différents types de représentation- dans ce cas à la fois les représentations algébriques et graphiques- sont alors et plus compétents dans la résolution de problèmes. Les résultats ont été similaires dans toutes les phases, ce qui montre la stabilité de l'approche des enseignants et confirme leur volonté d'utiliser l'approche ponctuelle.

DISCUSSION

La problématique centrale de cette étude se référait à l'approche utilisée par les étudiants-futures instituteurs pour la résolution de tâches sur des fonctions simples. La plupart des étudiants ont utilisé une approche ponctuelle afin de résoudre des tâches de fonctions simples. Une approche coordonnée est fondamentale dans la résolution de problèmes bien que beaucoup d'étudiants n'aient pas maitrisé même les fondamentaux de cette approche. Ce résultat se place en ligne directe des résultats d’autres recherches qui suggèrent que beaucoup d’étudiants traitent les fonctions étape par étape, alors qu’une approche globale est plus puissante (Even, 1998). Les étudiants qui peuvent facilement et librement utiliser une approche globale ont une meilleure et plus puissante compréhension des relations entre les représentations graphiques et algébriques et sont plus brillants dans la résolution de problème. Les deux approches sont apparues aussi dans d’autres recherches mais la stabilité de ces approches n’était pas évidente. Bien que des changements majeurs soient apparus dans le système éducationnel de Chypre quant aux programme didactique, matériel d’examen et manuels après la première phase de notre recherche, les approches ont été les mêmes et la forte relation entre l’approche coordonnée et la capacité à résoudre un problème s’est maintenue. Ainsi notre étude, qui s’inscrit dans la perspective de coordination de registres sémiotiques, est en ligne avec la citation suivante de Michèle Artigue (2006) : «Tout autant que la progression dans des niveaux croissants d’abstraction, la progression dans la connexion entre contextes, cadres, registres sémiotiques… essentielle à l’apprentissage, est délicate et doit être organisée dans la durée par l’enseignement».

REFERENCES

Artigue, M. (2006). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 269 – 288. IREM de Strasbourg.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2*. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008). The stability of students’ approaches in function problem solving: A coordinated and an algebraic approach. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 3-12). Nicosia: University of Cyprus.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-28). United States: The Mathematical Association of America.

Vanderbrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l’étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 149-185. IREM de Strasbourg.

L'ENSEIGNEMENT DES FONCTIONS À LA TRANSITION-COLLEGE-LYCEE À CHYPRE

Athanasios Gagatsis, Andreas Philippou et Paraskevi Michael

Université de Chypre

Mots-clés. *Fonction, registre, représentation, ponctuel, global, transition*

INTRODUCTION

Ce texte concerne l'enseignement des fonctions aux élèves du Collège et du Lycée de Chypre. Il cherche à préciser ce qui se joue concernant cet enseignement dans la transition Collège -Lycée à Chypre. L'enseignement et l'apprentissage des fonctions est un thème qui a fait l'objet de recherches très nombreuses (Dubinsky & Harel, 1992; Artigue, 2009; Vanderbrouck, 2011).

Artigue présente un certain nombre des outils conceptuels pour approcher l'apprentissage et l'enseignement des fonctions (Artigue, 2009). Nous adoptons trois d'entre eux qui nous semblent particulièrement efficaces pour l'étude de résultats de notre recherche concernant la transition Collège-Lycée :

- l'identification de différents registres de représentation de cette notion et l'analyse des caractéristiques des interactions entre ces registres (Duval, 2002).
- l'identification de différents points de vue possibles sur cette notion : le point de vue ponctuel de la correspondance entre un élément et son image mais aussi le point de vue global qui permet de reconnaître les fonctions (Artigue, 2009).
- l'identification de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches de fonction (Robert, 1998).

LA RECHERCHE

Notre recherche a été effectuée auprès de 758 élèves de Chypre et en particulier : 316 élèves de 3ème (14-15 ans), 259 élèves de seconde (15-16 ans) et 183 élèves de la première (16-17 ans). Nous avons proposé aux élèves 25 tâches sur les fonctions linéaires et affines et fonctions polynomiales du second degré en faisant intervenir le registre de la langue naturelle, le registre algébrique des formules et le registre graphique des courbes. Les 25 tâches ont été classées en cinq groupes : la définition de la fonction, la reconnaissance de fonctions (registre algébrique et graphique), l'interprétation des graphiques de courbes, la construction des graphiques et la résolution des problèmes verbaux engageant la notion de fonction.

Nous avons appliqué le logiciel CHIC (Bodin et al, 2000) aux résultats de notre recherche et nous avons produit 15 diagrammes de similarité et 15 diagrammes implicatives ("5 groupes de tâches" x "3classes") qui montrent l'évolution des réponses des élèves quant à la transition du Collège au Lycée. Par exemple les figures 1, 2 et 3 montrent l’évolution des trois groupes de variables pour les élèves de troisième à deux pour les élèves de seconde et finalement à un groupe pour les élèves de la première dans le cas d interprétations des graphiques.

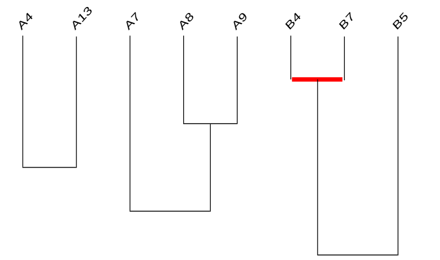


Fig. 1 : Troisième

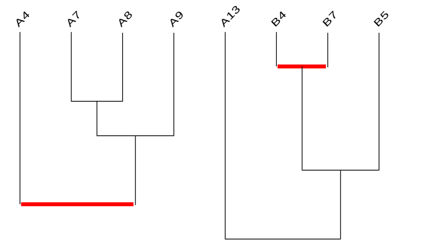


Fig. 2 : Seconde

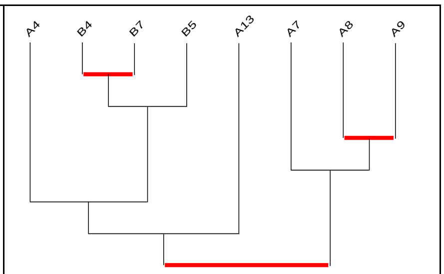
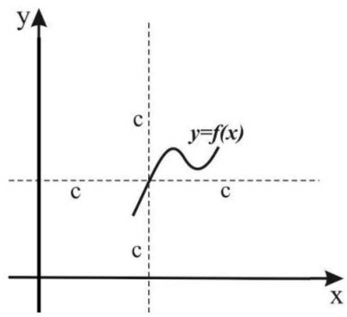


Fig. 3 : Première

La recherche a montré les difficultés qu’engendrent pour beaucoup d’élèves le passage d’un registre à un autre dès qu’il n’y a pas congruence entre eux, c'est-à-dire dès que la conversion ne se résume pas à une traduction mot à mot fidèle à l’ordre des termes.

En plus on observé un changement de point de vue et une évolution d’erreurs suivant l’expression algébrique de fonction. Par exemple on avait proposé aux élèves de faire les graphiques de fonctions suivants en se basant sur la figure :



(a) $y=f(x)+c$, (b) $y=f(x)-c$, (c) $y=f(x-c)$, (d) $y=f(x+c)$

On a observé peu d’erreurs dans les deux premiers cas qui sont des cas de conversion congruente et les élèves ont suivi en général le point de vue ponctuel. Au contraire les deux derniers, où les conversions sont non congruentes, créent plus des difficultés aux élèves du Collège et du Lycée et on observe aussi un changement du point de vue ponctuel au point de vue global.

DISCUSSION

On peut raisonnablement postuler que la transition Collège-Lycée s’accompagne de besoins accrus de flexibilité entre registres de représentation dans des cas de non congruence. Même si elle s’accompagne aussi d’une plus grande autonomie donnée dans le processus de résolution par les élèves de Lycée (choix de cadres, de registres de représentation, moins de questions intermédiaires) nous voudrions souligner le fait que la transition College-Lycée dans le cadre des fonctions met en jeu des discontinuités suivant de nombreuses dimensions. Ces discontinuités signifient que l’enseignement au moins en ce qui concerne la première au Lycée de Chypre reste immobile sans essayer de s’adapter aux élèves qu’il reçoit du Collège.

Comme Michèle Artigue le souligne très bien (Artigue, 2009), la transition étudiée est d’abord, comme toute transition, un phénomène institutionnel. Cette dernière construction se situe, quant à elle, dans le cadre plus vaste de la théorie anthropologique de didactique développée par Chevallard (Chevallard, 1992) qui doit aussi être prise en compte pour une interprétation des résultats de notre recherche.

REFERENCES

Artigue, M. (2009). L'enseignement des fonctions à la transition lycée – université. In B. Grugeon (ed.), *Actes du XVe Colloque CORFEM 2008,* pp. 25-44. Université de Cergy-Pontoise, IUFM de Versailles.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2.* Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 77-111.

Dubinsky, E, & Harel, G. (1992). *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes n°25. Mathematical Association of America.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2), 139-190.

Vanderbrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 149-185. IREM de Strasbourg.

THE LEARNING OF SERIES: SOME CONSEQUENCES OF INSTITUTIONAL CHOICES

Alejandro S. González-Martín

Université de Montréal (Canada)

Keywords. *Numerical series, registers of representation, anthropological theory of didactics.*

INTRODUCTION

The concept of numerical series (or *series*) appears in most of the Calculus courses that students have to follow in order to pursue scientific and technical studies. It has many applications, and the notion of series forms a basis for many other advanced mathematical concepts (such as Riemann integrals and power series). However, in spite of its importance, there are not many studies that focus on the teaching and learning, or the difficulties related to understanding numerical series (see González-Martín, Nardi & Biza, 2011, for a summary of these results). The lack of research on the topic may be partially explained by the fact that many efforts have been concentrated on only a few domains taught at the university level (Artigue, 2001).

Previous research (González-Martín, 2006) suggested that difficulties faced by the students in acquiring an understanding of series, and the inability to be able to convert from one representation to another, could lead to difficulties in understanding improper integrals. For this reason, we decided to take a closer look at the teaching of series in this study. After analysing how this concept is presented in textbooks (González-Martín *et al*, 2011) and in teaching practices (González-Martín, 2010), we constructed a questionnaire that was administrated to 32 post-secondary students in Montréal. This presentation summarises some of the main results of the analysis of the questionnaire, mainly addressing the use of different representations of series, and the teaching practices that are commonly used in Calculus courses.

THEORETICAL FRAMEWORK

The framework for this research is based upon a combined approach which draws from two different theories. As we are interested in the use and the coordination of different representations for the concept of series, we follow Duval's (1995) theory of registers of semiotic representation. This approach allows us to identify the main cognitive activities used in the textbooks, and our questionnaire includes questions aiming at verifying whether or not the students are able to make conversions and to coordinate the different registers.

As we are also interested in taking a closer look at the teaching practices surrounding the concept of series (and how students learn them), the adoption of an institutional perspective (Chevallard, 1999) constitutes the second aspect of our theoretical framework. In particular, we analyzed the didactic organisation of the contents of selected textbooks, as well as the activities which are required of the students, and whether the techniques employed encourage the use of different registers and the development of an understanding of series beyond algorithmic questions.

METHODOLOGY

Our questionnaire was constructed based on the results of our analysis of the textbooks used to introduce series in pre-Calculus courses in Québec over a period of 15 years (González-Martín *et al*, 2011), and on the results of our interviews with teachers about the practices they use to introduce series (González-Martín, 2010). Based on this data, we focused our analysis on the following two main elements:

- The students' level of understanding of the concept of series with a particular focus on the use of different registers of representation and the detection of difficulties identified in previous research.
- The verification of some conjectures about the relationship between students' learning and institutional practices (Chevallard, 1999).

The main topics covered in the questionnaire include: the retention of the definition of the concept of series, an awareness of applications, the use of series to model situations, the resolution of both routine and non-routine tasks, the interpretation of criteria, the process of visualisation and the notions of convergence and infinity.

We selected students from the courses of three different teachers. The questionnaire was distributed to a total of 32 students, during a one-hour class.

MAIN RESULTS

The preliminary results of the analysis of our questionnaire are presented in two sections: The first section provides an overview of the main difficulties students face in understanding the concept of series. Our preliminary results seem to indicate that achieving an understanding of the conditions required for applying some convergence criteria remains difficult for many students (as found by Nardi and Iannone in 2001, see González-Martín *et al*, 2011), and that learning about series is centred around the application of this criteria. However, the definition of the concept of series remains unclear for many students. Furthermore, the notion of convergence seems to be tackled only through convergence tests and algebraic manipulations. Finally, activities that require the use of visual representations (in the graphic or the geometric registers) also represent an obstacle for the students. As conjectured by González-Martín (2006), it seems that students have not developed a graphic representation for the sum of a series, in spite of this being the representation privileged by textbooks in order to explain the Integral test.

The second section provides an analysis of some of the common practices used to teach series and an attempt to validate some of our conjectures. Our results indicate that most of the activities that the students were exposed to through teaching practices did not require them to develop an understanding of the definition of series. Furthermore, most students were unable to identify applications of series, or to give an example of a situation which could be modelled using series. The fact that teaching practices and learning activities focus primarily upon the application of convergence criteria seems to affect the students learning of series.

In general, the results of our questionnaire seem to indicate that common difficulties faced by students when learning the concept of series, such as understanding the definition of the concept and the use of infinity have been identified by research, but they have been avoided by the choice of teaching practices and the activities presented in textbooks in Quebec. However, addressing these elements is essential to achieving an understanding of the concept of series.

REFERENCES

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level?, In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 207-220). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse de pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. *Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Bern.

González-Martín, A.S. (2006). [*The generalisation of the definite integral from the numerical, graphic and symbolic perspectives, using computer environments. Teaching and learning problems*]. Ph.D Thesis. University of La Laguna (Spain).

González-Martín, A.S. (2010). The concept of series: teachers' conceptions and teaching practices. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 33-40). Belo Horizonte: Brazil.

González-Martín, A.S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually-driven, and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(5), 565-589.

AN ECLECTIC APPROACH TO THE TEACHING OF CALCULUS

Michel Helfgott

East Tennessee State University

Keywords. *Calculus, proofs, applications.*

Abstract. *There are several approaches to the teaching of calculus, most of which contribute positively to the understanding of this difficult subject. We have developed a path to teaching first-year university calculus from a multiple perspective, which combines technology, core mathematical ideas and applications to biology, chemistry and physics.*

INTRODUCTION

After teaching introductory calculus on and off for several decades at the university level, I remain skeptical about adopting a one-strategy approach to the teaching of the subject. Interesting and innovative projects have been implemented in the past, for instance, either using computers to teach calculus in a laboratory setting (Park & Travers, 1966) or teaching calculus and biology through an integrated approach (Jean & Iglesias, 1990). Unfortunately, to our knowledge none of these projects can be reproduced easily. Moreover, it is difficult to assign students randomly to a treatment and a control group, and there are many variables that a researcher in mathematics education must take account of. The lack of a definitive answer to the question of which is the best method to teach calculus suggests that it is advisable to combine several different approaches, with the objective of reaching a balance between them (Andrews, 1996). This paper will discuss how we address the challenge of balance. We have to start by examining the bridge between high school and university mathematics.

ALGEBRA AND GEOMETRY

A crucial time for most students is the transition between high school and university. Before discussing limits, derivatives, integrals, and the like, it is advisable to solve several optimization problems that require only algebra and geometry. The power and limitations of a non-calculus approach can also be seen when analyzing the problem of finding tangents to curves (Baloglou & Helfgott, 2004). Unfortunately, the algebraic method becomes difficult for non-conic curves. Students will soon learn how the tools of calculus provide a path to the solution of a wide variety of problems linked to tangents as well as many other topics. Having previously seen some of the limitations of algebraic and geometric tools, they will surely realize how powerful the machinery of calculus is. Thus, students might be better motivated to spend time and effort to master a new subject. Next let us see what the main mathematical ideas behind a first-year calculus course are and how we deal with them.

CORE MATHEMATICAL IDEAS

We start Calculus I discussing the notion of convergence of a sequence and the main propositions about convergent sequences. All the statements are presented with care, but not much time is devoted to rigorous proofs; after all, this is not a real analysis course. We then analyze geometric series; other types of series will have to wait until Calculus II. It just happens that many interesting examples involve geometric series, thus it makes sense to introduce them rather early (bouncing balls, multiple dosage of drugs, etc.). It has been our experience that students understand the idea of the limit of a sequence more easily than any other type of limit, with the added advantage that the area under simple curves can be calculated before the tools of integral calculus have been learned.

We state the Intermediate Value Theorem and the Extreme Value Theorem but do not prove them. Similarly, no proof is provided for the most general setting of the chain rule. However, several particular cases are fully justified. The geometric evidence of the Mean Value Theorem (MVT) is overwhelming, hence no formal proof is attempted; many students accept the geometric evidence as a valid justification. Rather we spend time on the corollaries of MVT, especially the one that asserts that two functions differ by a constant if their derivatives are equal on an interval. Then the field is open to deal with antiderivatives and to solve simple differential equations, well before the definite integral is introduced through sequences of Riemann sums. As expected, a high point of first-year calculus is the discussion of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC). We only prove a particular case of it, namely when the function is continuous, positive, and monotonic, but state and use FTC in its full generality. The path is then ready to define the natural logarithm and its inverse, which happens to be the exponential function. It should be noted that the most salient aspect we have developed is not in the realm of mathematics itself but in the widespread use of examples from the natural sciences.

APPLICATIONS TO THE NATURAL SCIENCES

My vision of the role of applications in an introductory calculus course has been influenced by my participation in the Symbiosis Project (2006-2010) at East Tennessee State University, a systematic attempt to integrate biology, mathematics, and statistics during the first three semesters of studies (Depelteau, Joplin, Govett, Miller, & Seier, 2010). For a wider audience of biology, chemistry, and physics students, we developed a freshman calculus course heavily oriented toward applications to the natural sciences, without compromising the conceptual aspects of mathematics. Besides the usual examples from physics, we include many examples from biology and chemistry in the belief that they are models of real phenomena that illustrate quite well the underlying ideas from one-variable calculus. For instance, we discuss extensively several quantitative aspects of enzyme kinetics, cell transport, and photosynthesis. This approach is compatible with the five guidelines for teaching first-year calculus that we presented at ICME 10 (Helfgott, 2004).

CONCLUSIONS

It is my opinion that it is advisable to address the scope and limitations of algebra and geometry before a formal study of calculus. Thereafter, a gradual introduction of the main mathematical ideas of differential and integral calculus, coupled with a rational use of technology, sets the path to follow. The proofs developed in class should be limited in number and not necessarily the most general available, but every proposition needs to be clearly stated. By not discussing subtle traditional topics, which can be handled by technology, we save precious time that can be used to analyze relevant applications to the natural sciences. This approach to the teaching of calculus was used by the author in the development and delivery of modules for the Symbiosis Project, as well as in regular calculus courses.

REFERENCES

Andrews, G.E. (1996), Mathematical Education: A Case for Balance, *The College Mathematics Journal*, 27 (5) , 341-348.

Baloglou, G. & Helfgott, M. (2004), Finding Equations of Tangents to Conics, *The AMATYC Review*, 25 (2), 35-45.

Depelteau, A., Joplin, K., Govett, A., Miller, H.A., & Seier, E. (2010), SYMBIOSIS: Development, Implementation, and Assessment of a Model Curriculum across Biology and Mathematics at the Introductory Level, *Life Sciences Education*, 9 (3), 342-347.

Helfgott, M. (2004), Five Guidelines in the Teaching of First-Year Calculus, *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematical Education*, Copenhagen, Denmark. Retrieved from http://www.icme-organisers.dk/tsg12.

Jean, R.V. & Iglesias, A. (1990), The juxtaposition vs. the integration approach to mathematics in biology, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 22 (4), 147-153.

Park, K. & Travers, K.J. (1966), A comparative study of a computer-based and a standard college first-year calculus-course, in *Research in Collegiate Mathematics Education II*, Kaput, J., Schoenfeld, A.H. & Dubinsky, E. (Eds.).

USING COUNTEREXAMPLES IN TEACHING & LEARNING OF CALCULUS

Sergiy Klymchuk, Tatyana Zverkova

Auckland University of Technology, Odessa National University

Keywords. *Calculus, counterexamples, teaching, learning*

INTRODUCTION AND FRAMEWORKS

The paper deals with the usage of counterexamples in teaching and learning of first-year university calculus as a pedagogical strategy. It investigates students' attitudes towards this pedagogical strategy. It is based on an international study of more than 600 students from 10 universities in different countries.

Creating counterexamples is neither algorithmic nor procedural and requires advanced mathematical thinking which is not often taught at school (Tall, 1991). Many students nowadays are used to concentrate on techniques, manipulations, familiar procedures and don't put much attention to the concepts, conditions of the theorems, properties of the functions, and to reasoning and justifications. Students often rely on technology and sometimes lack logical thinking and conceptual understanding. Sometimes mathematics courses, especially at school level, are taught in such a way that special cases are avoided and students are exposed only to 'nice' functions and 'good' examples. This approach can create many misconceptions that can be explained by the Tall's generic extension principle: "If an individual works in a restricted context in which all the examples considered have a certain property, then, in the absence of counterexamples, the mind assumes the known properties to be implicit in other contexts." (Tall, 1991).

In this study, the theoretical framework was based on Piaget's notion of cognitive conflict (1985) and the notion of 'pivotal-bridging example' introduced by Zazkis & Chernoff (2008): "An example is pivotal for a learner if it creates a turning point in the learner's cognitive perception or in his or her problem solving approaches; such examples may introduce a conflict or may resolve it. … When a pivotal example assists in conflict resolution we refer to it as a pivotal-bridging example, or simply bridging example, that is, an example that serves as a bridge from learner's initial (naïve, incorrect or incomplete conceptions) towards appropriate mathematical conceptions." (p.197). The goals of the study were to investigate students' attitudes towards the usage of counterexamples in teaching and learning of calculus and analyse the effect of cognitive conflict and how students resolve it from the point of view of the notion of the pivotal-bridging example.

THE STUDY

In this study, 10 lecturers from 10 universities in different countries used counterexamples in teaching calculus for the first 9 weeks of the first semester. The students were first-year undergraduate students majoring in science or engineering. The lecturers were selected using a combination of convenience and judgement sampling methods. The countries and number of participated universities were (in an alphabetical order): Germany (1), New Zealand (1), Poland (1), Russia (1), Spain (1), The Netherlands (1), Ukraine (2), USA (2). An across-countries approach was chosen to reduce the effect of differences in education systems, curricula and cultures. After 9 weeks of using counterexamples in teaching and learning of calculus a questionnaire was distributed among students. The total number of students exposed to the usage of counterexamples over the 9 week period in all 10 universities was 860. Responses to the questionnaire from 612 students were received so the response rate was 71%. The participation in the study was voluntary - it was a self-selected sample. Data was collected in each university separately and sent to the authors with translation where needed.

Dealing with counterexamples for the first time was challenging for some students. When they heard they could disprove a wrong statement by providing one counterexample they thought they could “prove” a correct statement by showing an example. Even if they knew they could not prove a theorem by providing only examples, it was hard for them to accept the fact that a single counterexample disproves a statement. Some students believed that a particular counterexample was just an exception to the rule and that no other ‘pathological’ cases existed. Selden & Selden have articulated these ideas in (1998): “Students quite often fail to see a single counterexample as disproving a conjecture. This can happen when a counterexample is perceived as ‘the only one that exists’, rather than being seen as generic.”

All incorrect statements given to the students were within their knowledge and often related to their common misconceptions. The following questionnaire was distributed among students after 9 weeks of using counterexamples in teaching and learning of calculus as a pedagogical strategy.

Question 1. Do you feel confident using counterexamples?

a) Yes Please give the reasons: b) No Please give the reasons:

Question 2. Do you find this method effective?

a) Yes Please give the reasons: b) No Please give the reasons:

Question 3. Would you like this kind of activity to be a part of assessment?

a) Yes Please give the reasons: b) No Please give the reasons:

Students’ responses to the questionnaire are summarized in Table 1:

Number of Students	Question 1 Confident?		Question 2 Effective?		Question 3 Assessment?	
	Yes	No	Yes	No	Yes	No
612	**116**	**496**	**563**	**49**	**196**	**416**
100%	**19%**	**81%**	**92%**	**8%**	**32%**	**68%**

Table 1. Summary of findings from the questionnaire.

The overwhelming statistics and numerous students' comments showed that the students were very positive about the usage of counterexamples in learning and teaching of calculus. The vast majority of them (92%) reported that they found the method of using counterexamples to be effective in the sense that it invoked one or more of the following: it made them think about some aspects of mathematics that they never thought before, it opened their eyes on the importance of conditions of rules/theorems and properties of functions, it revealed their misconceptions, it forced them to pay attention to every detail, it enhanced their understanding of mathematical concepts. According to (Zazkis & Chernoff, 2008) for those students counterexamples were pivotal or bridging examples. Many students made comments that using counterexamples helped them to understand concepts better, prevent mistakes in future and develop or enhance their logical and critical thinking skills. These skills are general ones and can be used by the students in other areas of their life that have nothing to do with mathematics. A collection of incorrect statements as supplementary exercises for a first-year university calculus course and suggested counterexamples to them illustrated by graphs can be found in (Klymchuk, 2010).

REFERENCES

Klymchuk, S. (2010). Counterexamples in Calculus. Mathematical Association of America.

Piaget, J. (1985). The Equilibrium of Cognitive Structures. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Selden, A., Selden J. (1998). The role of examples in learning mathematics. The MAA Online: http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 3-21). Kluwer: Dordrecht.

Zazkis, R. and Chernoff, E.J. (2008). What makes a counterexample exemplary? Educational Studies in Mathematics, 68, 195-208.

VARIABLES Y PARÁMETROS

Maria Eugenia Marmolejo Rivas & François Pluvinage

Cinvestav-IPN, México D. F:

Palabras claves. *Funciones, variables, parámetros, Real Mathematics Education*.

DIFICULTADES FUNCIONALES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Una resolución de ecuación puede ser algebraicamente correcta y sin embargo presentar defectos relacionados con el manejo de funciones. Tomamos el siguiente ejemplo de un examen de diagnóstico:

Resolver la ecuación $\sqrt{7-x} = x-5$ en el conjunto de los números reales. (1)

La mitad de los estudiantes de preparatoria a quienes aplicamos este examen contestó que las soluciones son x = 3 y x = 6, en base a un procedimiento algebraico prácticamente impecable. De hecho observamos en hojas de respuestas que siguieron el modelo de resolución presentado en su libro de texto (Swokowski & Cole) para una ecuación similar: $3+\sqrt{3x+1} = x$. En el libro se menciona que si se elevan ambos miembros a una potencia par, es necesario comprobar el resultado. Pero para la resolución de nuestra ecuación, esta recomendación sólo se tradujo en comprobar que las soluciones encontradas se sitúan en el dominio de la función raíz cuadrada, es decir $x < 7$. Y se olvide que el lado derecho de la ecuación debe ser positivo al igual del lado izquierdo.

Dificultades semejantes, ya subrayadas no son propias del manejo de ecuaciones por un público estudiantil. En un artículo de Adjiage y Pluvinage (2012) se propone usar Derive para resolver la ecuación $x\sqrt{x^2-1} = 0$ en el campo de los reales. Derive da las tres soluciones -1, 0 y 1 al aplicar la siguiente regla: Si a × b = 0 entonces a = 0 o b = 0 (*Algebracy*), y por lo tanto acepta x = 0 como solución a pesar de que el radical no está definido en 0 (*Functionacy*).

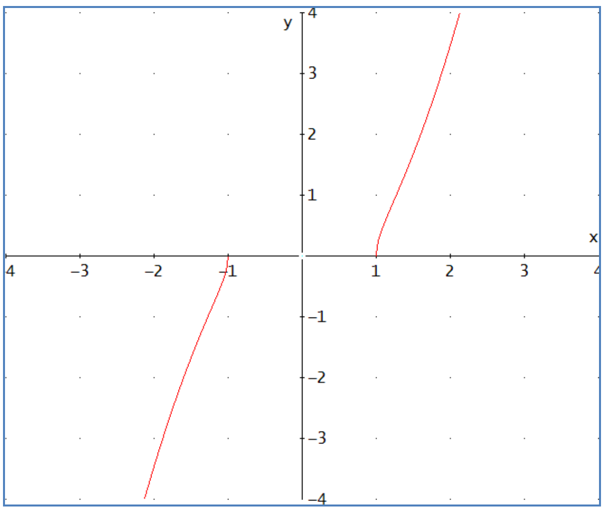


Figura 1: Gráfica de la function $y = x\sqrt{x^2-1}$

En cambio, cuando le piden la gráfica de la función $y = x\sqrt{x^2 - 1}$, el software toma en cuenta el dominio (véase la figura 1). Según dice Vanderbrouck (2011), la función es un objeto matemático que da lugar al mismo tiempo a diferentes visiones: puntual, local y global, y el dominio de una función es parte de sus propiedades globales.

PARÁMETRO, UN OBJETO CLAVE EN EL PENSAMIENTO FUNCIONAL

En la resolución de problemas, cuando al describir matemáticamente una situación, además de variables se requieren parámetros, el manejo se hace generalmente mas complicado. Entre los obstáculos que hubo que superar durante el desarrollo histórico del concepto de parámetro, Drijvers (2003) cita los siguientes: 1) sus diferentes significados, 2) la distinción de las variables ordinarias y las variables que juegan el papel de parámetros y 3) la percepción de expresiones como objetos que representan soluciones generales.

En un artículo de Jaroslav Sedivy (1976) se hace un análisis mediante un diagrama (tipo árbol) para resolver la ecuación: $(1 - m)x^2 + 2amx - a^2m = 0$. La importancia aquí es el manejo de los parámetros m y a, del valor que asuman estos parámetros depende qué tipo de ecuación estemos manejando. Lo más inmediato es ver que si m = 1 el término cuadrático desaparece y la ecuación es lineal.

Esta idea de usar diagramas, no siempre es viable, como vemos a continuación, por lo que es muy importante, para fines didácticos, elegir correctamente los ejemplos. Sedivy plantea otra ecuación, muy interesante por cierto, pero en términos de elaborar el análisis, muy complicada ya que ahora son necesarias además de las herramientas de álgebra, herramientas de cálculo. Un ejemplo presentado por el autor es el desarrollo dado por un alumno al resolver la ecuación: $x + \sqrt{x^2 - 2ax} = b$. Después de un tratamiento análogo al tratamiento del primer ejemplo, se obtiene la ecuación $2(b - a)x = b^2$. Las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de esta última, pero la reciproca no es cierta.

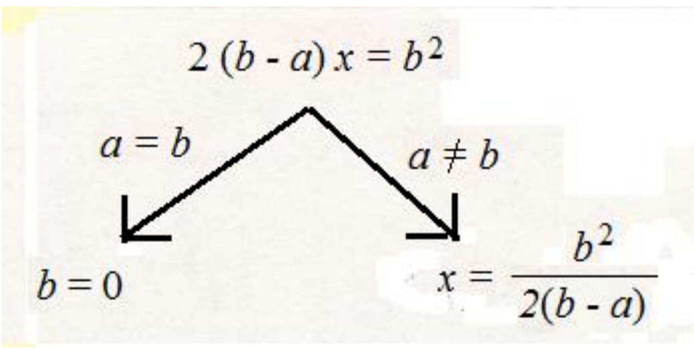


Figura 2: Diagrama de estudio de casos

Por eso, en todos casos se necesita regresar a la ecuación inicial. Por ejemplo, cuando a y b son nulos, la ecuación se escribe $x + |x| = 0$, que tiene todos los números negativos como soluciones.

Con esta última ecuación entramos en el mundo de las funciones definidas y continuas a trozos. Estas funciones (parte entera, signo, etcétera) tienen un sitio muy reducido en los libros de texto clásicos pero son muy importantes cuando se usa la computación, en particular en situaciones de modelización.

EXPERIMENTACIÓN EN PROCESO

En un marco de *Realistic Mathematics Education* (RME), aplicamos una ingeniería didáctica (Artigue, 1991) al diseño de actividades que permitan a los estudiantes descubrir estrategias y luego desarrollar métodos más formales. Uno de los contextos que usamos es el llenado de recipientes para modelar una situación real y poner en juego el concepto matemático de parámetro. En un taller, pensamos en presentar diversas situaciones y observaciones de aula relacionadas. Por ejemplo, en la situación "*las huellas de las ruedas de una bicicleta*", aplicamos la metodología ACODESA, desarrollada por Fernando Hitt (2007), que toma en cuenta las siguientes fases: el trabajo individual, el trabajo en equipo, el debate en el aula y la reflexión personal. Se destaca por ejemplo en estudios clínicos, que la descripción de fenómenos por el público entrevistado, a la vez muestra sus dificultades y luego juega un papel central en la conceptualización.

REFERENCIAS

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2012). Strates de compétences en mathématiques. Accepté pour publication dans la revue *Repères IREM.*

Artigue M. (1991). Didactical research in analysis. In D. Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, p. 167-196. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Referencia en línea consultada en enero del 2012:

http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2003-0925-101838/inhoud.htm

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion, in M. Baron, D. Guin, L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés,* p. 65-88. París: Hermès.

Sedivy, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching, *Educational studies in mathematics*, Vol. 7, p. 121-126.

Swokowski, E. & Cole, J. (1996). *Algebra y trigonometría con geometría analítica*, Grupo Editorial Iberoamerica, Tercera edición, p 90.

Vandebrouck, F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de didactique et sciences cognitives*, Vol. 16, p. 149–185.

DES ASPECTS DE RUPTURE DANS LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPÉRIEUR EN MATHÉMATIQUES

Ridha NAJAR

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

INTRODUCTION

En mathématiques, la transition secondaire-supérieur est généralement connue comme la plus difficile parmi les transitions entre les cycles d'enseignement. Plusieurs travaux de recherche se sont intéressés à l'étude des divers aspects (culturel, cognitif, institutionnel…) de cette transition. Adoptant l'approche anthropologique du didactique, Bosch, Fonseca, et Gascon (2004), expliquent les difficultés dans le passage du lycée à l'université par des discontinuités et des changements brusques qui se produisent dans les contrats didactiques qui régissent les organisations mathématiques et didactiques des deux institutions. Nous situant dans cette perspective, nous essayons dans ce travail de comprendre et d'expliquer les difficultés liées à l'enseignement et l'apprentissage des notions ensemblistes et du formalisme mathématique dans la transition Enseignement Secondaire (ES) – Première année des Classes Préparatoires Scientifiques (CPS1), en Tunisie.

ANALYSE DES RAPPORTS INSTITUTIONNELS

Nous appuyant sur des critères d'ordre anthropologique empruntés aux travaux de Bosch et ses collègues (2004) (rigidité des techniques, complétude des praxéologies mathématiques) et sur des critères d'ordre cognitif (niveau de mise en fonctionnement des connaissances (Robert, 1998) et mode d'intervention du savoir : *procédural-formel* (Tall, 2002)), et nous servant des documents d'enseignement officiels (programmes[2], manuels officiels et sujets de baccalauréat pour ES et programmes et fiches de travaux dirigés pour CPS1), l'étude des rapports des institutions ES et CPS1 aux notions ensemblistes et au formalisme mathématique (Najar, 2010) a mis en évidence une rupture entre les environnements praxéologiques mis en place dans les institutions ES et CPS1. Cette rupture se manifeste essentiellement au niveau de la structuration du savoir et du fonctionnement des connaissances.

Ainsi, dans ES, malgré la présence des notions ensemblistes dans le curriculum et leur usage fréquent dans le développement théorique de divers thèmes du programme, nous remarquons un manque dans l'institutionnalisation des notions utilisées et une absence de structuration dans leur présentation dans les manuels. En même temps, les praxéologies mathématiques mises en œuvre dans les exercices pour le travail de ces notions sont essentiellement ponctuelles, intervenant surtout au

[2] En vigueur au moment de l'étude. Année scolaire 2005/2006.

niveau pratico-technique. Les techniques associées à ces praxéologies sont, de façon dominante, routinières, rigides et déconnectées des technologies qui supposent les justifier. En prenant par exemple la notion de bijection, nous remarquons qu'en géométrie, alors que les auteurs du manuel scolaire[3] utilisent souvent la définition ensembliste de bijection et plusieurs de ses propriétés dans le développement du cours sur les isométries, seules deux propriétés sont mises en œuvre dans les exercices : [si f est bijective alors $N = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$] et [Pour une bijection f de P sur P, $f \circ f^{-1} = id_P$]. De plus, les techniques de travail associées à ces propriétés sont fortement routinisées et pourraient s'assimiler à un calcul algébrique sur le symbolisme associé. Dans le domaine de l'analyse, par contre, la question de bijectivité d'une fonction est toujours liée aux fonctions continues et strictement monotones et on sépare généralement la tâche de montrer la bijectivité de celle de déterminer la bijection réciproque. Ainsi, en proposant aux étudiants de CPS1, l'exercice ci-dessous :

> Pour tout réel x on pose $f(x) = -x^3$. Montrer que f définie une bijection de **R** sur **R**. Donner la bijection réciproque de f.

tous les étudiants interrogés (51 étudiants) ont répondu à la première partie de la question en montrant que f est continue et strictement croissante, mais aucun des étudiants ayant répondu à la deuxième partie de la question (42 sur 51), via la résolution de l'équation en x : $f(x)=y$, n'a pensé à utiliser la définition de bijection pour justifier, par cette même équation, que f est bijective.

Cette façon de travailler les notions ensemblistes dans le secondaire laisse invisible le lien entre les techniques utilisées et le discours technologique associé et empêche les élèves de voir la potentialité que représentent les notions ensemblistes dans la résolution des problèmes.

Dans CPS1, en revanche, les notions ensemblistes sont présentées dès le départ de façon structurée et en toute généralité. L'environnement praxéologique relatif au travail de ces notions s'approche de celui utilisé dans les développements théoriques du cours. Le fonctionnement des connaissances dans le topos des étudiants est par conséquent très proche, au niveau des méthodes et du discours technologique, de celui qu'il est dans les développements théoriques du cours et les praxéologies mathématiques mises en œuvre dans les travaux dirigés (TD) sont surtout locales, intervenant au niveau technologico-théorique et les techniques associées sont rarement routinières ou rigides. Ainsi, dans la première fiche de TD donnée aux étudiants pour travailler ces notions, tous les exercices donnés sont théoriques et leur résolution requiert une bonne disponibilité de connaissances et une maîtrise du formalisme mis en jeu. En atteste l'exercice ci-dessous extrait de cette fiche :

---

[3] En Tunisie, un seul manuel scolaire est autorisé par le ministère de tutelle, et ce pour chaque classe du secondaire.

Soient E, F, G des ensembles et f une application de F vers G. On désigne par $\mathcal{A}(E,F)$ l'ensemble des applications de E vers F. Montrer que :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall\, g,h \in \mathcal{A}(E,F),\ (f\circ g = f\circ h \Rightarrow g = h)$$

Dans cet exercice, l'interprétation de l'équivalence formelle donnée à démontrer, la gestion de la quantification universelle et de l'implication qui s'en suit et l'adoption de formulation appropriée des notions mises en jeu constituent une situation assez complexe et peu familière aux étudiants entrant en CSP1.

INTERPRÉTATION ET CONCLUSION

L'étude du rapport institutionnel aux notions ensemblistes dans l'institution ES montre une centration sur le bloc pratico-technique des praxéologies mathématiques mises en œuvre dans les exercices, une insuffisance dans l'usage du bloc technologico-théorique dans le travail des élèves et un écart entre le discours technologique employé dans le développement du cours (qui apparait plutôt structural, formel) et celui requis dans la résolution des exercices. Ceci limite le fonctionnement des notions ensemblistes dans ES au niveau procédural et technique pour les élèves. En revanche, dans l'institution CPS1, le fonctionnement de ces notions chez les étudiants et chez les enseignants ne présente pas un grand écart, le bloc technologico-théorique des praxéologies mathématiques mises en œuvre est souvent sollicité dans les exercices et est généralement supposé disponible chez les étudiants. Nous notons par ailleurs une sous-estimation en CPS1 quant à l'usage des connaissances au niveau technique. Ceci rend difficile le retour sur les praxéologies mathématiques ponctuelles étudiées dans ES, leur intégration dans des praxéologies mathématiques locales ou régionales et la mise en évidence du lien entre les blocs pratico-technique et technologico-théorique dans le fonctionnement des connaissances. Il y a là un dysfonctionnement et une rupture entre les environnements praxéologiques mis en place dans les institutions ES et CPS1 pour l'étude des notions ensemblistes. Ce constat nous a incités à étudier l'effet de ce dysfonctionnement institutionnel sur la formation des étudiants entrant dans les classes CPS1 et leurs possibilités d'apprentissage. L'étude effectuée dans le cadre de notre thèse (cf. Najar, 2010) a montré que la rupture constatée lors du passage de ES à CPS1 au niveau de l'enseignement des notions ensemblistes est difficile à dépasser par les étudiants et est potentiellement source de difficultés d'apprentissage. Ceci se manifeste surtout au niveau de l'appropriation du sens du langage ensembliste, de la gestion des représentations sémiotiques et symboliques ainsi que dans la mise en œuvre des justifications technologiques dans la réalisation des tâches données. Ces difficultés ont constitué un obstacle majeur dans la résolution des problèmes pour la plupart des étudiants interrogés. Cette situation nous incite à réfléchir quant à une action pouvant aider à atténuer la brutale rupture qui s'est constituée entre le lycée et l'université en mathématiques depuis la contre-réforme.

RÉFÉRENCES

Bosch, M., Fonseca, C., Gascon, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactiques des mathématiques,* Vol. 24- 2/3, p. 205-250. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur*. Thèse de Doctorat Université Paris Diderot, Paris 7. (http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00564191_v1/)

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.18, 2, p.139-190.

Tall, D. (2008). *The transition to formal thinking in mathematics*. (www.davidtall.com/papers)

ESTABLISHING SYNERGY BETWEEN MATHEMATICIANS AND MATHEMATICS EDUCATORS: THE CASE OF TEACHING AND LEARNING THE CONCEPT OF LIMIT

Elena Nardi

University of East Anglia (Norwich, UK)

> '...we, mathematicians as well as didacticians […] have to act energetically in order to create the positive synergy between our respective competences which is necessary for a real improvement of mathematical education, both at secondary and at tertiary levels. Obviously such a positive synergy is not easy to create and is strongly dependent on the quality of the relationship between mathematicians and didacticians'. (Artigue, 1998 p. 482-3)

Keywords. *University mathematics education, mathematicians, concept of limit*

BACKGROUND: UNIVERSITY MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH

University-level mathematics education research is a relatively young research area that over the last twenty or so years has started to embrace an increasingly wider range of theoretical frameworks and methodologies. Variation has also characterised research in this area with regard to: the role of the participants, students and mathematicians, in the research – from 'just' subjects of the research to fully-fledged co-researchers; and, the degree of pedagogical action involved in the research – from non-interventionist to developmental/action research (e.g. Artigue et al, 2007). Particularly, the 'positive synergy' (p. 483) that Michèle Artigue refers to in the above quotation has been purposefully aspired to in several, recent studies of teachers and teaching that focus on the pedagogical and epistemological perspectives of university mathematicians. The study on which I draw in this paper (e.g. Nardi, 2008) is largely within this currently growing strand.

THE STUDY: ENGAGING MATHEMATICIANS IN EDUCATIONAL RESEARCH

The study has its theoretical origins in several traditions of educational research: *co-learning partnerships* (e.g. Jaworski, 2003); *communities of practice* (e.g. Wenger, 1998); Mason's (1998) *inner research*; Schön's (1987) *reflective practice*; and, Chevallard's (1985) notion of *transposition didactique*. In borrowing from these traditions it has the following characteristics: it is collaborative, context-specific and data-grounded and, through being non-prescriptive and non-deficit, it aims to address the often difficult relationship between the communities of mathematics and mathematics education (Sierpinska & Kilpatrick, 1998: Part VI). A fundamental belief in this work is that development in the practice of mathematics teaching is manageable, and sustainable, if driven and owned by the mathematicians who are expected to implement it.

The data I am sampling from consists of focused group interviews with mathematicians of varying experience and backgrounds from across the UK. Its analyses, carried out through the narrative method of *re-storying* (Clandinin & Connelly, 2000) have been presented, primarily in (Nardi, 2008), in the format of a dialogue between two fictional, yet entirely data-grounded characters, M, mathematician and RME, researcher in mathematics education. The study is the latest in a series of collaborative studies (1992-2004) that explored Year 1 and 2 students' learning (in tutorial observations, interviews and written work); and, engaged lecturers in reflection upon learning issues and pedagogical practice (in individual and group interviews).

The focused group interviews conducted in the course of the latest of these studies lasted about half-a-day. Discussion in the interviews was triggered by *Student Data Samples* based on the findings of the previous studies. These were samples of students' written work, interview transcripts and observation protocols collected during (overall typical in the UK) Year 1 introductory courses in Analysis / Calculus, Linear Algebra and Group Theory. The findings of the study were arranged in three, naturally overlapping strands: *student learning*, *university-level mathematics pedagogy* and *the often fragile relationship between the communities of mathematics and mathematics education*. Within the first strand, three themes (students' *mathematical reasoning* with a particular focus on their conceptualisation of the necessity for proof and enactment of various proving techniques; students' *mathematical expression* as mediated in their use of words, symbols and diagrams; and, students' encounter with *fundamental concepts* of advanced mathematics – *Functions*, across Analysis, Linear Algebra and Group Theory, and *Limits*). In this paper I list some findings in relation to the last of these themes (*Limits*) in order to illustrate some aspects of what Artigue refers to as 'positive synergy' (1998).

SAMPLE OF FINDINGS: MATHEMATICIANS' PERSPECTIVES ON THE TEACHING AND LEARNING OF THE CONCEPT OF LIMIT

The interviewed mathematicians offered incisive analyses with regard to several issues that have been foci of research in this area at least since the 1980s (e.g. Tall, 1991). For example, the interviewees offered an anatomy of students' often difficult relationship with the formal definition of convergence in terms of its *symbolisation* (e.g., with regard to constituent elements of the formal definition such as quantifiers, modulo, inequalities and the nature of ε), its *verbalisation* (e.g., with regard to the role of ordinary words such as *arbitrarily* and *eventually* in attempts to verbalise the meaning of the definition) and *visualisation* (e.g., with regard to the role of real-line based pictures in attempts to visualise the meaning of the definition). In their accounts key findings of mathematics education research find consolidation and extension; and, reciprocally, their efforts to articulate pedagogical reflection in conversation with mathematics educators enriches and refines their pedagogical perspectives.

CONCLUSION: ENRICHED PERSPECTIVES, CHANGING STEREOTYPES

Returning to the quotation by Artigue in the opening of this paper, studies such as the one reported briefly here aspire to meet at least two objectives: explicitly, garner university mathematicians' perspectives, as experienced learners, doers and teachers of mathematics, on the learning and teaching of mathematics; and, less explicitly, allow a certain image of university mathematicians to emerge, one that is characterised by pedagogical awareness, perceptiveness and sensitivity and is in some contrast with widespread stereotypes. Distinctive characteristics of this type of study include its context specificity, example-centredness, intensive mathematical focus of its samples of student data and the relaxed yet focused, unthreatening and mutually respectful ambience of the data collection process. While *direct* recommendations for practice were not its primary aim, follow ups of the study (current and future, see: http://www.uea.ac.uk/~m011) have aimed at a collaborative consideration, implementation and evaluation of innovative practice.

REFERENCES

Artigue, M. (1998). Research in mathematics education through the eyes of mathematicians. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 477 - 490). Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics Thinking and Learning at Post-secondary Level. In F. K. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). US: NCTM.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (2000). *Narrative inquiry: Experience in story in qualitative research*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics, 54*(2/3), 249 - 282.

Mason, J. (1998). Researching from the inside in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 357 - 377). Dordrecht / Boston / London: Kluwer.

Nardi, E. (2008). Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level. New York: Springer.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco: Jossey-Bass.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Eds.). (1998). *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer.

Tall, D. O. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

“INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE” DE HENRI LEBESGUE: TRADUCTION CRITIQUE, ANALYSE HERMENEUTIQUE ET CONTEXTE HISTORIQUE-MATHEMATIQUE

Sílvio César Otero-Garcia

Université d’État de São Paulo (PPGEM/UNESP – Rio Claro) – Brésil

Mots-clés. *Henri Lebesgue, histoire de l’analyse mathématique, théorie de la mesure, intégration, thèse de doctorat de Lebesgue.*

INTRODUCTION ET OBJECTIFS

Nous voudrions présenter notre projet de thèse en cours, financé par la FAPESP (Fondation de Financement de la Recherche de l’Etat de São Paulo), et inscrit au PPGEM de l’UNESP, au Brésil. Il a pour but de rendre disponible, en langue portugaise, une traduction critique, une analyse herméneutique et une mise en contexte historique-mathématique de la thèse de doctorat de Lebesgue (Intégrale, Longueur, Aire). Notre motivation est de rendre plus accessible une source originale en contribuant avec les recherches dans le domaine de l’Histoire de la Mathématique et faciliter l’utilisation de ce matériel comme ressource pédagogique en Éducation Mathématique. Voici les étapes de notre travail: a) Élaborer une traduction notée et commentée de la thèse de doctorat d’Henri Lebesgue; b) Faire une analyse de la thèse ayant comme base la méthodologie de l’Herméneutique de profondeur (HP) de Thompson (1990); c) Exposer les bases mathématiques et historiques nécessaires pour la compréhension de la théorie exposée par Lebesgue dans sa thèse.

IMPORTANCE DE LA PROPOSITION DE NOTRE TRAVAIL

Premièrement, il y a deux points de notre proposition sur lesquels nous voudrions mettre l’accent: l’un concernant l’Histoire de la Mathématique et l’autre concernant l’Éducation Mathématique.

La philosophie du “presque toujours” a été systématisée par Lebesgue, ayant son origine lors de son intégrale. Ce concept a motivé une transformation si extrême dans l’Analyse Mathématique que, selon Lintz (2007), établir deux divisions dans l’Histoire de cette branche de la Mathématique, l’une, “avant Lebesgue” et l’autre, “après Lebesgue”, n’est pas exagéré. Plusieurs chercheurs attirent l’attention sur l’importance de la thèse de doctorat de Lebesgue. Selon May (1966), cette thèse a été si “complète” et “parfaite” que cela n’a quasiment pas laissé de place pour plus de travail en coopération. Hoare et Lord (2002) font apprendre qu’à la thèse de Lebesgue les difficultés gênantes de l’intégrale de Riemann en ont été tout à fait balayées et que cette réalisation serait considérée plus tard comme aussi profonde que l’expansion des nombres rationnels pour les nombres réels. Ainsi, la valeur de la théorie de la mesure et celle de l’intégrale de Lebesgue pour la Mathématique et, par conséquent, pour l’Histoire de la Mathématique sont indéniables. Il va sans dire qu'aborder la valeur de ces théories signifie mettre en valeur aussi la thèse de Lebesgue car, en effet, elles y ont été introduites. Toutefois, comment s'insère notre travail dans ce contexte ? Baroni et Nobre (1999) montrent la difficulté de faire une recherche pure en Histoire de la Mathématique au Brésil sur des sujets et des personnages européens surtout à cause des contraintes liées aux sources primaires sur le sol national. Ainsi, nous pensons que la traduction de la thèse de Lebesgue en portugais du Brésil est essentiel puisqu'il s'agit d'un matériel de référence pour la recherche dans le domaine de l'Histoire de la Mathématique, encore plus incontournable pour les études qui se baseront sur l'Histoire de l'Analyse Mathématique, de la théorie de la mesure et de l'intégration ou encore, plus spécifiquement, d'Henri Lebesgue.

Deuxièmement, nous désirons montrer l'importance de notre travail pour l'Éducation Mathématique, spécialement pour le champ commun à l'Histoire et à l'Éducation Mathématique. Jahnke et al. (2000) affirment qu'en principe les objectifs et les effets de l'emploi des sources originales dans l'Éducation Mathématique ne sont pas différents de ceux des autres façons de concevoir l'Histoire de la Mathématique dans l'Éducation Mathématique. Toutefois, il y a trois aspects généraux à souligner qui décrivent mieux les effets particuliers de l'utilisation de ce genre de matériels de référence: substitution, réorientation et compréhension culturelle. Il va de soi que le simple accès à la thèse de Lebesgue pourra produire ces trois résultats, sachant que Jahnke et al. (2000) déclarent que l'obstacle de la langue et le besoin de mieux comprendre l'époque où ont été écrites les œuvres et le contexte général des idées sont les grandes difficultés existant en ce qui concerne l'emploi des matériels originaux à l'Éducation Mathématique. Notre traduction permettra d'éliminer la barrière d'ordre linguistique; l'analyse herméneutique et la contextualisation historique-mathématique en élimineront les autres.

PROCEDES METHODOLOGIQUES

Cette recherche se décomposera en trois procédés essentiels. Il nous faut, alors, éclaircir brièvement notre plan de travail pendant chacune de ces étapes d'étude. Selon Vinay et Darbelnet (2004), il existe deux stratégies différentes de traduction, la traduction directe et la traduction oblique. Étant donnée que notre but est d'aboutir à un texte en langue portugaise précis et aussi fidèle que possible à l'original de Lebesgue, nous nous prêtons à faire recours aux méthodes de traduction directe, en effet, de traduction littérale, celles du calque et de l'emprunt, en cet ordre; sinon, au cas où la traduction se montrerait inexistante dans la langue cible, il sera opportun de faire usage de la méthode de traduction oblique, en alternance: transposition, modulation, équivalence et adaptation.

Notre deuxième étape: l'analyse herméneutique de l'œuvre. Nous concevons la thèse de Lebesgue à partir d'une forme symbolique, au sens de Thompson (1990) affirmant que l'analyse formelle, quoique nécessaire, n'est pas suffisante pour obtenir des interprétations plausibles. De cette façon, d’autres aspects doivent être aussi considérés, étant liés à la notion d’analyse socio-historique. Ces deux types d’analyse sont constitués par des étapes d’une méthodologie d’interprétation des formes symboliques proposées par Thompson, comprises comme un référentiel méthodologique de l’herméneutique de profondeur. Il y est adjoint un troisième type d’analyse émergeant des réflexions conjointes de celles ultérieurement apparues. Cette dernière analyse est dénommée interprétation/réinterprétation.

À la dernière étape, celle de l’étude du contexte historique-mathématique, on la sous-divise en deux: mise en contexte historique et mathématique. La contextualisation historique n’aborde pas les mêmes questions que celles de l’analyse socio-historique, bien qu’il puisse exister des intersections entre ces sphères. Certes, notre souci à ce point ne se rapporte pas à l’œuvre en soi, mais à son contenu. Cela nous oblige à présenter une histoire de l’Analyse Mathématique, de la théorie de l’intégration, de la vie et de l’œuvre de Lebesgue. Cela veut dire que nous ferons recours à des sources secondaires. Ainsi, ce procédé se déroulera tout en faisant une révision de la littérature concernée par nos objectifs dans le contexte de notre recherche. Quoiqu’il s’agisse de réviser le matériel, à notre avis cette étape ne manque pas d’importance par rapport aux autres, considérant la privation de matériel en langue portugaise sur le sujet. Finalement, pour la contextualisation mathématique, nous aurons comme sources de données des œuvres plus générales se rapportant à l’Analyse Réelle et aussi des textes plus spécifiques.

REFERENCES

Baroni, R.L.S., & Nobre, S.R. (1999). A pesquisa em educação matemática e suas relações com a educação matemática. In Bicudo, M.A.V. (Ed.), *Pesquisa em educação matemática: Concepções & perspectivas* [Research in mathematics education: Conceptions and perspectives] (pp. 129-136). São Paulo: Editora Unesp.

Hoare, G.T.Q., & Lord, N.J. (2002). 'Integrale, longueur, aire' the centenary of the Lebesgue integral. *The Mathematical Gazette, 86,* 3-27.

Jahnke, H.N. et al. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In Fauvel, J., & Maanen, M. (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lintz, R. (2007). *História da matemática* [History of mathematics]. Campinas: Editora Unicamp.

May, K.O. (1966). Biographical sketch of Henri Lebesgue. In Lebesgue, H. *Measure and the integral* (trans. Kenneth O. May, pp. 1-7). San Francisco: Holden-Day Inc. (Original work published 1956)

Thompson, J.B. (1990). *Ideology and modern culture: Critical social theory in the era of mass communication.* Stanford: Stanford University Press.

Vinay, J., & Darbelnet, J. (2004). A methodology of translation. In Venuti, L. (Ed.), *The translation studies reader* (pp. 128-137). Abingdon: Routhedge Taylor & Francis Group.

CONCEPCIONES SOBRE LOS NÚMEROS REALES EN ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE UNIVERSIDAD[4]

Rosa Elvira Páez Murillo*, Laurent Vivier**, Emigdio Martínez Ojeda*, Carlos Alberto Torres Martínez*

*Universidad Autónoma de la Ciudad de México, **LDAR – Université Paris 7

Palabras claves. *Números reales, representaciones de los números, concepciones.*

INTRODUCCIÓN

Investigaciones realizadas con estudiantes sobre la construcción de conceptos de cálculo como los de *función* (Sajka, 2003), *tangente* (Vivier, 2010) y *límite* (Sierpinska, 1985; Páez, 2004) entre otros, nos muestran la pertinencia de indagar a profundidad sobre sus conocimientos básicos acerca de números reales, intervalos, desigualdades y valor absoluto. Por ello, nos interesa explorar sobre las concepciones[5] de los estudiantes de ingeniería acerca de los conceptos previos a la construcción del concepto de *función*, específicamente conjunto, subconjunto, números reales y desigualdades.

Este proyecto está enmarcado desde una perspectiva de la construcción de conceptos basada en la *teoría de representaciones semióticas* (Duval, 1995; Hitt, 2006), según la cual un individuo ostenta cierto nivel de construcción de un concepto cuando es capaz de identificar y articular diferentes representaciones del objeto matemático.

Nos centramos estrictamente en un análisis descriptivo de las dificultades iniciales de aprendizaje de los estudiantes con respecto a los números reales. Identificar dichas dificultades nos permitirá –en un siguiente paso de la investigación– indagar su origen (de corte didactico o epistemológico), y proponer una metodología de enseñanza-aprendizaje y actividades didácticas que puedan ayudar a superarlas.

METODOLOGÍA

En esta parte de la investigación participaron dos grupos de alumnos de ingeniería del curso de Cálculo Diferencial de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México. El grupo objeto de estudio para esta comunicación fue de catorce estudiantes del Plantel Casa Libertad. Para la experimentación se diseñaron seis actividades, de las cuales tres estaban destinadas a los conceptos previos y tres específicamente al concepto de función; las tres primeras actividades se desarrollaron en nueves sesiones, cada una de hora y media; y luego se aplicó un examen individual sobre los temas estudiados.

---

[4]Los resultados mostrados en este poster son parte del Proyecto PI 2010-45 financiado por la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) y el Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal (ICyTDF)

[5]Duroux (1983) define este término como un saber local que se produce cuando se privilegian ciertas situaciones, en menoscabo de otras, en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, una concepción es operante sobre una parte de lo que Vergnaud designa como campo conceptual y por ende presenta necesariamente insuficiencias.

ALGUNOS RESULTADOS

En la perspectiva teórica planteada, en las actividades diseñadas se solicitaba el uso de diferentes representaciones; así, en la actividad dos, se les pedía que, con sus propias palabras, expresaran quién es el conjunto de los *números naturales***,** *enteros y racionales*. Con respecto al conjunto de los números naturales, sólo cuatro de ellos tienen una idea específica de que son los números que sirven para contar. La concepción más común corresponde a que *son números positivos*. Algo similar sucede con los números enteros, pero esta tarea les resulta un poco más compleja que la anterior; sólo dos expresan su idea de manera precisa a partir de los números naturales: "*Son todos los números naturales, el cero y los negativos de los números naturales*". La concepción más común –utilizando ya sea un lenguaje natural o un lenguaje simbólico– corresponde a *números enteros como números positivos y negativos que incluyen el cero*; es decir, en su lenguaje contemplan a los números reales. Con respecto a los números racionales, se encontraron concepciones como: "*Son todos aquellos números a los que se les puede sacar mitad tercia, cuarta, etc*", "*Son todos los números que son fracciones o tienen decimales que no tiene un entero exacto*", "*Los números que cuentan con punto decimal*" y "*Son números que tienen división exacta*".

En el interés de identificar si los estudiantes reconocen algunas representaciones del objeto matemático "número", se les mostró el siguiente listado para que identificaran cuáles corresponden a números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales:

$$\left\{-10, -\sqrt{5}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{5}{8}, 1, \sqrt{3}, 4, 2\pi, 6, -0.5\overline{9}, \sqrt{4}, , \sqrt{\frac{5}{8}}, e, \sqrt{\frac{1}{4}}, \frac{10}{5}\right\}$$

De los catorce estudiantes, sólo dos reconocen el número natural 2 escrito como √4 (quizás se deba a que toman √4 como 2 y -2), pero no así escrito como 10/5, y nueve reconocen los números naturales escritos en su forma más simple. Con respecto a la identificación de los números enteros, sólo uno reconoce todos los números enteros, incluyendo el √4 y 10/5. De los nueve que solo reconocieron a los números naturales escritos en su forma más simple, cinco reconocen a √4 como número entero. Ahora, en relación con los números racionales, sólo un estudiante reconoce todos los números racionales dados en la lista; cinco alumnos escriben como números racionales solamente los *números expresados en forma de fracción*; dos de ellos incluyen el número expresado con notación periódica. Y, con respecto a los números irracionales, sólo un estudiante los reconoce. Una de las concepciones que se identificó fue: *todo lo que se exprese con raíz corresponde a un número irracional*.

Siguiendo la misma línea de reconocimiento de los números reales, en otra pregunta se les solicitó que, si era posible, proporcionaran dos ejemplos de números que fueran racionales pero que no fueran reales. Sólo cuatro estudiantes pudieron manifestar que no se puede dar un número racional que no sea real, dos proporcionaron números irracionales, dos más mencionaron números imaginarios y cinco se abstienen de responder.

En resumen, de los catorce estudiantes, sólo un estudiante reconoce los números reales y el subconjunto de los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Algunas representaciones del objeto matemático *número* les resultan difíciles; reconocen el objeto número y la clase a la que pertenece si está expresado en su forma más simple; además, si a ello se le suma la negación de un enunciado, la actividad matemática se les hace más compleja. Es evidente que la mayoría de estos estudiantes no han construido el concepto de número real; pero resulta más normal de lo que parece que al iniciar el estudio del análisis matemático demos por hecho que los estudiantes ya han construido dicho concepto. Al respecto, Sierpinska (1985) manifiesta que es conocido, aunque paradójico, que no se puede entender la noción de algunos conceptos del cálculo –como *límite*– sin haber comprendido la noción de número real, pero a su vez, los números reales son comprendidos después de haber comprendido la noción de límite.

Las dificultades que derivan de no reconocer algunas representaciones del objeto matemático *número real* son evidentes en tareas que se colocaron en una siguiente actividad, cuando se les solicitaba que identificaran algunos números que pertenecen a un intervalo dado. Asimismo, esta dificultad influye directamente tanto al momento de identificar dominios de funciones como al evaluar funciones.

BIBLIOGRAFÍA

Duroux, A. (1983). La valeur absolue: Difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit X*, No. 3, pp. 43-67.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

Hitt F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 253-268.

Páez, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*, Tesis de Doctorado. Cinvestav-IPN. México.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function –A case study, *Educational Studies in Mathematics* 53: 229–254.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématique*. Vol. 6 No. 1, pp. 5-67.

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (15).

MODELOS INTUITIVOS SOBRE EL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL

Osiel Ramírez Sandoval, Asuman Oktaç.

CINVESTAV-IPN.

Palabras claves. *Álgebra lineal, transformación lineal, modelos intuitivos*.

Resumen. Nuestra investigación se enfoca en el concepto de Transformación Lineal en Álgebra Lineal, teniendo por objetivo identificar las dificultades que presentan algunos estudiantes de matemáticas para manejar dicho concepto en el espacio vectorial R^2. Utilizamos las ideas de Fischbein (1987, 1989) sobre la intuición y los modelos intuitivos para explicar los fenómenos observados.

ANTECEDENTES

En un estudio anterior identificamos algunos modelos intuitivos que construyen los estudiantes sobre el concepto Transformación Lineal en el contexto geométrico en R^2, donde el universo de transformaciones lineales se reduce a algunos tipos de transformaciones como rotaciones y reflexiones del plano y sus composiciones (Molina y Oktaç, 2007). En dicho trabajo también se plantea que los estudiantes tienden a asociar la noción de transformación lineal con el movimiento. Con el fin de profundizar respecto a dichos modelos e ideas intuitivas, y averiguar si en el contexto algebraico ocurre algo similar, llevamos a cabo la presente investigación. Asimismo pretendemos contrastar las respuestas de los estudiantes en los diferentes contextos.

MODELOS INTUITIVOS

Según Fischbein (1989), cuando nos enfrentamos con ideas, resultados o conceptos intuitivamente inaceptables, tendemos a sustituirlos por modelos intuitivos que se rigen por reglas accesibles y simples para el individuo, que generalmente funcionan en cierto contexto. El empleo de estos modelos puede ser consciente o inconsciente; es por ello que consideramos importante conocer los modelos intuitivos que desarrollan los estudiantes, los cuales posteriormente afectan su desempeño relacionado con el concepto en cuestión.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Para los fines de nuestra investigación se entrevistó a cinco estudiantes de manera individual, quienes pertenecían a un programa de maestría en diferentes especialidades, con un tronco común en matemáticas.

En la entrevista se realizó una secuencia de preguntas en cuatro bloques. El primer bloque correspondía a preguntas abiertas para estacionar el concepto de Transformación Lineal. El segundo presentaba transformaciones en ambiente geométrico. El tercer bloque consistía de preguntas que correspondían a la contraparte del anterior en un ambiente algebraico. Finalmente en el cuarto bloque se presentaba algunas figuras a transformar.

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

Encontramos que el tipo de respuestas que los alumnos daban en un contexto geométrico diferían sustancialmente de sus argumentos algebraicos. Como ejemplo, a continuación presentamos una de las preguntas de la entrevista junto con la respuesta correspondiente de un estudiante (Hugo), seguida de la misma pregunta planteada algebraicamente junto con la respuesta del mismo estudiante.

4.c ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores A, B de la Figura 4 (c) en los vectores de T(A), T(B)? Argumenta por qué.

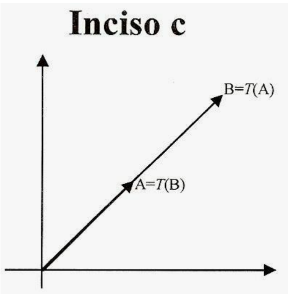
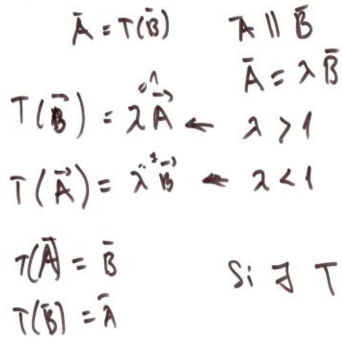


Figura 4c



Trabajo de Hugo en 4c

El estudiante afirma que existe tal transformación lineal y emprende una serie de operaciones (Trabajo de Hugo en 4c) para justificar su conjetura.

Entrevistador: ¿Existe un λ que es mayor que uno y menor que uno, simultáneamente?

El estudiante calla unos segundos, analiza su razonamiento y replantea el problema.

Hugo: La transformación $T(A)=B$ . . . el problema es estructurar esto. . . es que hay un múltiplo, ahí metido, pero no hallo como relacionarlos. . . (escribe) $T(B)=A$ . . . Bueno; estoy seguro de que sí es posible de hallar la transformación, no se me ocurre ahorita de momento, pero considero que sí.

Al momento de presentarle una situación análoga pero en el ambiente algebraico, sus argumentos difieren sustancialmente como vemos a continuación.

5 c) ¿Puede existir una transformación lineal que mapee el vector (2,2) al vector (4,4) y el vector (4,4) al vector (2,2)?

Hugo: La transformación si existiera, al aplicárselo a esta coordenada (indicando el vector (2,2)) tendría. . .me la doble (indicando el vector (4,4)), pero también hay que contemplar el otro, si se lo aplico a la

> imagen del primero, me la regresa al anterior. . . entonces tendría que encontrar. . . por ejemplo: Sería algo así como afirmar que 2=1/2.

El estudiante muy posiblemente al ver los movimientos o desplazamientos en ambos vectores, asegura la existencia de una transformación lineal que cumpla con las condiciones de la figura. Cuando se le confronta estos dos resultados contradictorios, el estudiante muestra que sigue creyendo en la existencia de una transformación lineal, que su razonamiento en la parte geométrica es correcto, y que bastaría con resolver el sistema para encontrarla. A pesar de intentar a resolverlo y obtener un sistema inconsistente, Hugo sigue buscando el escalar que afirma existe. Esta característica de *perseverancia* que tienen las intuiciones en ocasiones puede obstaculizar el aprendizaje de un individuo de ciertos conceptos o ciertos aspectos de algún concepto.

CONCLUSIONES

Aunque los estudiantes entrevistados mostraron un buen desempeño en el contexto algebraico, en su mayoría existen argumentos y modelos intuitivos que no les permitieron identificar algunas transformaciones lineales presentadas geométricamente.

Basándonos en los argumentos de los estudiantes podemos concluir que la discrepancia entre la parte geométrica y algebraica se produce porque las figuras aluden cierta intuición que los lleva a evocar sus modelos intuitivos y conjeturar de manera distinta a la parte algebraica, que generalmente se respalda en la realización de cálculos. Este fenómeno también tiene que ver con la naturaleza de cada registro y los significados que los conceptos adquieren en ellos, que es el tema de una investigación en curso.

REFERENCIAS

Fischbein E. (1987). Intuition in science and mathematics: an educational approach. Holland: Reidel Publishing.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*. 9(2), 9-14.

Molina, G. & Oktaç, A. (2007). Concepciones de las transformaciones lineales en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 10(2), 241-273.

ACTIVIDADES BASADAS EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

Avenilde Romo Vázquez y Elizabeth Montoya Delgadillo

CICATA-IPN, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Palabras claves. *Modelación matemática, modelo prexeológico extendido, validaciones teóricas y prácticas*

EL ROL DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL NIVEL SUPERIOR

La sociedad demanda cada vez más una formación matemática universitaria que dote a los futuros profesionales de herramientas matemáticas para afrontar las tareas profesionales. La pregunta que emerge es, ¿cómo desde la didáctica de las matemáticas se puede atender esta demanda? Una posible dirección es situarse en el paradigma de la matemática como disciplina de servicio (Howson et. al 1988) y diseñar actividades didácticas que hagan intervenir la modelación matemática.

La modelación matemática ha sido reconocida como una herramienta fundamental en muchas profesiones, por ejemplo en la ingeniería (Pollak , 1988; Bissell 2000, 2002; Kent y Noss 2002). Particularmente los trabajos de Bissell muestran que en las prácticas profesionales existe más que la creación de modelos matemáticos la adaptación de modelos matemáticos disponibles para enfrentar tareas no matemáticas. Una pregunta que emerge y motivó esta investigación es, ¿cómo generar situaciones de aprendizaje que soliciten la adaptación de modelos matemáticos para enfrentar tareas no matemáticas?

La complejidad de la adaptación de modelos matemáticos para enfrentar tareas no matemáticas es que exige tanto conocimientos matemáticos como no matemáticos, validaciones matemáticas y no matemáticas que se relacionan, capacidad de interpretación de resultados matemáticos en relación al contexto no matemático. Lo anterior sugiere que el tratamiento de la tarea no matemática requiere conocimientos y validaciones no matemáticas que no pueden producirse al enfrentar una sola tarea sino varias tareas del mismo tipo.

EL MODELO PRAXEOLÓGICO EXTENDIDO

Para el diseño de actividades se utilizó el modelo praxeológico extendido de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Castela y Romo, 2011). Este modelo permite considerar la relación entre los tipos de tareas (matemáticas y no matemáticas), la manera de resolverlas (adaptación del modelo matemático) y las validaciones (elementos que permiten justificar que la adaptación realizada es funcional). Particularmente, en este modelo se considera la componente tecnológica práctica θ^{p} (asociada a las validaciones prácticas) que es dada por las instituciones usuarias *Iu* de las matemáticas, en este caso disciplinas de especialidad. Las validaciones matemáticas θ^{th} en cambio están dadas por la matemática vista como disciplina, pero también pueden estar dadas por la institución enseñanza de las matemáticas E(M). Se entiende que E(M) es una institución de transmisión, puede ser un curso de matemáticas o la matemática que se enseña.

$$\left[\begin{array}{c} T, \tau, \theta^{th}, \Theta \\ \theta^{\mathrm{p}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow P(M) \\ \leftarrow Iu \end{array}$$

Las instituciones P(M) e *Iu* son vistas como instituciones de referencia, es decir que cuando un estudiante enfrente una tarea no matemática y haga uso de una técnica (o modelo) matemática, pueden aparecer dos tipos de validaciones, matemáticas para asegurar que la técnica funciona y prácticas que sostengan que el **uso de esa técnica** en la resolución del problema es el adecuado.

POBLACIÓN DE ESTUDIO

Estas actividades se encuentran en una etapa previa a la experimentación y serán aplicadas (próximamente) a estudiantes chilenos y mexicanos del segundo año universitario. El análisis de los datos obtenidos generará información sobre el funcionamiento de estas actividades didácticas y particularmente del rol de las validaciones y argumentaciones de los estudiantes formados en dos contextos institucionales muy distintos.

REFERENCIAS

Bissell, C.C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the learning of mathematics*, *20*(3), 3-11.

Bissell, C.C. (2002). Histoires, héritages et herméneutique : la vie quotidienne des mathématiques de l'ingénieur. *Annales des Ponts et Chaussées*, 107-8, 4-9.

Castela, C. & Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'Automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *31*(1), 79-130.

Kent, P. & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2*, 39/1-39/7, London UK.

Howson, G., Kahane, J. P., Lauginie, P., Turckheim E. (1988). *Mathematics as a Service Subjec*. Cambridge: Cambridge University Press (ICMI Study Series).

POPULARIZATION AND MATHEMATICS EDUCATION

José Francisco Rodrigues, Jaime Carvalho e Silva

University of Lisbon, University of Coimbra, Portugal

Keywords. *Popularization, awareness*

The Popularization of Mathematics (or Raising Public Awareness of Mathematics-RPA as it is also called) is not a new subject. However, viewed as "sharing mathematics with a wider public" and "encouraging people to be more active mathematically", is a relatively recent subject that motivated the fifth international study (Howson & Kahane, 1990) of the International Commission on Mathematical Instruction. One should recognise that it had important developments after the World Mathematical Year – WMY2000 (Behrends, Crato & Rodrigues, 2012), which highlighted the Image of Mathematics as one of its three main goals. The other two were the role of mathematical sciences facing the great challenges of the 21st century and their development as a key for the development.

Compulsory Education, wide as it may be, will never encompass all important or relevant or elementary aspects of mathematics; the tendency in some countries to reduce the number of hours of mathematics does not help either. As Bill Barton observed in the first Klein workshop in Funchal, "it was noted, new unprocessed (but suitably presented) mathematical ideas can motivate and inspire teachers" (Barton, 2010). The Popularization of Mathematics can have a strong connection to the curriculum, at least giving incentive to solve problems (Larsen, 1990) or to explore connections with other areas. On the other hand, technology has widened enormously the range of possibilities to popularize mathematics. For example, easy movie editing makes it possible for anybody to produce mathematical movies and post them on popular video websites like YouTube or Vimeo. Advances in computer power and software development make it is easy now to manipulate complex mathematical objects.

The international "Mathematics of Planet Earth 2013" initiative, that want to be another great occasion for showing the essential relevance of mathematics in planetary issues at research level for resolving some of the greatest challenges of the 21st Century (Rodrigues, 2011), is also obviously a good vehicle to raise the public awareness of mathematics both at the educational and the cultural level. This initiative proves the need to "provide a platform to showcase the essential relevance of mathematics to planetary problems", as was highlighted by C. Rousseau (Rousseau, 2011). In all fields the role of mathematics is frequently misunderstood or even ignored and it is not easy to "create a context for ... interdisciplinary developments".

In Germany, the year 2008 was a successful national year of mathematics and in India, 2012 was declared also the 'National Mathematical Year'. The Prime Minister of India, Manmohan Singh, voiced concerns over the "badly inadequate" number of competent mathematicians in the country. He also said that the perception that pursuit of mathematics does not lead to attractive career possibilities "must change." He also declared December 22, the birthday of Ramanujan, as 'National Mathematics Day. The government became aware that students in India have not pursued mathematics at advanced levels over more than three decades, which has resulted in a decline in quality of mathematics teachers at schools and colleges. The Indian Prime Minister recognized that "there is a general perception in our society that the pursuit of mathematics does not lead to attractive career possibilities”. So he publicized his Government decision that “this perception must change. This perception may have been valid some years ago, but today there are many new career opportunities available to mathematics and the teaching perception itself has become much more attractive in recent years". The Prime Minister said also that the mathematical community has a duty to find out "ways and means" to address the shortage of top quality mathematicians and reach out to the public, especially in the modern context, where mathematics has tremendous influence on every kind of human endeavour”. We think this preoccupation in India is common to a lot of other countries.

Mathematics has a strong relation with its past and the place of mathematical objects in time and space is a very special one. The history of mathematics is a very useful tool to popularize mathematics and to help mathematicians and mathematics teachers to build a correct image of their science. The series of talks organized by the Société Mathématique de France called "Un texte, un mathématicien" is a good example of what can be done. These are being made to attract the attention “du grand public, des professeurs du second degré et des lycéens et étudiants” with great success and so they give opportunity for “un large public de découvrir les mathématiques contemporaines”.

The Klein project may also be a good vehicle to show everybody that Mathematics is really developing in all directions. The Book that will come out of this project as well as the Vignettes that are being developed will give ideas and opportunities to widen the mathematics horizons of students. Themes like Higher Dimensions, Banach's fixed point theorem, Elliptic curves and others that are part of the Klein Vignettes will hardly ever be part of Compulsory education.

Compulsory education would be the easiest way to tell students what mathematics is about. It will certainly remain the best way to present mathematics but, as we noted, it will be far from enough. It is true that full recognition of expository work is still lacking, but the importance of it is more and more accepted. On the other hand, mathematics education does usually little to prepare students for this. Mathematics is a notoriously difficult subject to talk about to outsiders (including even scientists). As mathematical activity (research, applications, education) has changed dramatically in the last decades, so the new trends develops and create new challenges, in particular in exposition and popularization (Lovasz 2010).

So, we think a big investment in the popularization of mathematics in school and outside school is essential. The didactical potential and the importance of Popularization of Mathematics (or "Raising Public Awareness") for mathematical education is enormous. There exists nowadays a great deal of excellent material and experiences, all around the world, that need to be widely known, shared and remains to be explored for education purposes, in particular in compulsory education. It may be timely to suggest that a new ICMI Study, similar in its goals but broader and different to the fifth ICMI Study, up-dating it in all directions, might be very useful.

REFERENCES

Barton, B. (2010). On the Madeira Klein Conference. *CIM Bulletin* # 27 Jan 2010, pp 6-9. Retrieved from http://www.cim.pt/files/publications/b27.pdf

Behrends, E., Crato, N., & Rodrigues, J. F. (Ed.). (2012). *Raising Public Awareness of Mathematics*, Springer, in press.

Howson, A. G., Kahane, J.–P. (Ed.). (1990). *The Popularization of Mathematics*, ICMI Study Series #5, Cambridge: Cambridge University Press.

Larsen, M.E. (1990). Solving the Problem of Popularizing Mathematics Through Problems. In A. G. Howson, J.–P. Kahane (Ed.). *The Popularization of Mathematics,* ICMI Study Series #5, Cambridge,144–150.

Lovasz, L. (2010). Trends in Mathematics: How they could Change Education?" communication at the International Conference "Future of Mathematics Education in Europe", Lisbon, Portugal, December 16-18, 2007. *CIM Bulletin* # 27 Jan 2010, pp 10-15. Retrieved from http://www.cim.pt/files/publications/b27.pdf

Rodrigues, J.F. (2011). The Planet Earth System, a challenge to mathematicians. *CIM Bulletin* #30 July 2011, pp 30-31. Retrieved from http://www.cim.pt/files/publications/b30.pdf

Rousseau, C. (2011). Four themes with potential examples of modules for a virtual exhibition on the "Mathematics of Planet Earth". *CIM Bulletin* #30 July 2011, pp 31-32. Retrieved from http://www.cim.pt/files/publications/b30.pdf

INTERFACES ÉDUCATIVES ENTRE MATHÉMATIQUES ET INDUSTRIE. UNE ÉTUDE SOUTENUE PAR MICHÈLE ARTIGUE

Rudolf Straesser (Sträßer), José Francisco Rodrigues

Justus-Liebig-Universitaet Giessen, Allemagne - Universidade de Lisboa, Portugal

Mots-Clés. *Etude CIEM, mathématiques appliquées, modélisation, communication*

En 2009 et à la suite d'une suggestion du comité national des mathématiques Portugais, la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (CIEM) et l'International Council for Industrial and Applied Mathematics (ICIAM) ont lancé une étude sur ¨Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI)¨ - traduction RS: Interfaces Éducatives entre Mathématiques et Industrie. L'étude EIMI – comme toutes les études CIEM - a trois composantes majeures: CIEM lance l'étude avec un document de discussion (« DD », pour EIMI voir Damlamian & Straesser 2009) préparé par une commission internationale de programme (CIP). Le document de discussion était publié et distribué dans les journaux et communautés concernés de la manière la plus vaste pour susciter des commentaires et des textes sur le sujet de l'étude. À la lecture de ces textes, la CIP a invité à une conférence EIMI d'étude du sujet (« study conference »), laquelle était organisée par le Centro International de Matemática (CIM) en 2010 à Lisbonne. Les participants de la conférence préparent un livre de l'étude (« study book ») pour condenser les idées présentées sur le sujet. La publication de ce « study book » est la fin d'une étude CIEM, avec l'espoir d'y avoir regroupé le savoir disponible sur le sujet de l'étude concernée.

L'étude EIMI était motivée par l'importance de l'utilisation et le développement des mathématiques dans l'industrie, dans les entreprises ainsi que dans le secteur public et les activités professionnelles quotidiennes des citoyens. L'étude EIMI considère le mot « industrie » au sens le plus large possible "... as any activity of economic or social value, including the service industry, regardless of whether it is in the public or private sector" (OECD 2008, p. 4). Le document de discussion est moins précis dans la définition des Mathématiques ("Mathematics ...comprises any activity in the mathematical sciences, including mathematical statistics"), mais le document de discussion indique clairement que dans cette étude, « mathématiques » est à prendre au sens le plus large possible, y compris les mathématiques cachées et mathématiques pas vues comme mathématiques.

LES DIFFICULTÉS DE COMMUNICATION

Les difficultés de communication, qui évidemment existent entre les systèmes éducatifs des divers pays, entre la discipline des mathématiques pures et les mathématiques de l'entreprise, au moins partiellement résultent d'une différence importante entre les mathématiques éducatives, les mathématiques poussées par la recherche scientifique et les mathématiques utilisées dans les entreprises:

Normalement, les mathématiques dans l'entreprise, lorsqu'elles sont « visibles » et acceptées comme mathématiques, tendent à être plus avancées et bien liées aux sous-domaines mathématiques disciplinaires. Les mathématiques éducatives, surtout dans les écoles, collèges et lycées, sont parfois très élémentaires, quelques fois de la simple Arithmétique, mais sont à développer, sinon à construire par ceux qui font leurs études. Par conséquent le mot « mathématiques » représente des réalités différentes dans les deux sortes d'institutions: peut-être Arithmétique ici, et équations différentielles de plusieurs variables là.

De plus, les deux communautés ont des horizons de temps de travail tout à fait différents, normalement beaucoup plus court dans l'entreprise qu'à l'école. En outre, les mathématiques de l'industrie sont impliquées dans un système d'objectifs explicites et de critères de succès donnés. En revanche, les objectifs des systèmes scolaires sont souvent incertains et l'évaluation du succès de l'enseignement y fait défaut.

Pour compliquer la communication entre les différentes communautés, les communautés utilisent des « jargons » différents, caractéristiques des communautés respectives. Dans des communautés plus complexes elles-mêmes, on y trouve des jargons différents partiels et des approches de recherches partielles. Pour la communication entre les communautés, il faut trouver des métaphores compréhensibles et acceptables pour surmonter cette difficulté.

LA MODÉLISATION DES SITUATIONS EXTRA-MATHÉMATIQUES, SURTOUT INDUSTRIELLES

Une autre différence entre les approches respectives de l'industrie et de l'éducation est leur relations avec la modélisation. Pour l'industrie, la modélisation est le point d'entrée de l'utilisation des mathématiques. Normalement et typiquement dans l'entreprise, on a des objectifs hors des mathématiques, les mathématiques sont un outil (parmi d'autres), un instrument pour s'attaquer à une question hors des mathématiques. Au moins dans la sous-communauté didactique et éducative, la modélisation est devenue un but important, quelquefois en lui-même, une compétence à développer sans pour autant prendre en compte les objectifs hors mathématiques d'une modélisation.

Dans le système éducatif, les conséquences sont évidentes : Pour la modélisation, on part d'une position « méta », intéressée à enseigner le cercle complet de la modélisation (situation extra-mathématique, identification de la question à résoudre, modélisation de la situation et de la question par une mathématisation, résolution mathématique de la question, interprétation des résultats dans le contexte extra-mathématique, parfois plusieurs répétitions du cercle de modélisation; pour une description voir Blum et al. 2002). Il y a même des publications didactiques qui discutent de l'enseignement des compétences partielles dans ce cercle, ce qui rend secondaire, même éphémère la question du but de l'utilisateur des mathématiques, alors que celui-ci est l'aspect essentiel de la modélisation industrielle. A notre avis, et même dans une école laïque et neutre, enseigner la modélisation doit rendre visible le contexte et les buts d'une utilisation des mathématiques – dans le sens technique, politique et social.

REMARQUES FINALES

Le résultat le plus important de l'étude EIMI est le simple constat qu'il n'y a pas de pôle de recherche sur les mathématiques dans l'industrie dans le monde d'aujourd'hui. L'analyse de l'utilisation des mathématiques dans l'industrie (au sens large de l'étude EIMI) vient de commencer dans diverses institutions et disciplines (comme la « didactique professionnelle » en France, la sociologie du travail ou la didactique des mathématiques en général). Une grande partie des contributions de l'étude EIMI vient des personnes travaillant dans des institutions qui n'ont pas pour mission la recherche et le développement des mathématiques dans l'industrie ou dans l'enseignement technique et professionnel. Par conséquent, le travail sur cette problématique est souvent un travail personnel, même privé, ne pouvant guère compter sur un support institutionnel. Ainsi, pour autant qu'il y ait progrès dans ce domaine, il est assez lent. Les méthodes de recherche suivent les modes des disciplines voisines et, parfois, sont peu adaptées au sujet de recherche. Ce qui se passe dans l'industrie elle-même est une pratique bien établie et nécessaire, mais donne l'impression qu'une réflexion théorique de la pratique commence seulement au sein des organisations professionnelles.

Pour conclure, il faut mentionner que tout ce texte est uniquement notre interprétation personnelle de l'étude EIMI. Pour avoir une interprétation plus équilibrée et objective, il faut attendre la parution du livre de l'étude ("study book").

RÉFÉRENCES

Araújo, A., Fernandes, A., Azevedo, A., & Rodrigues, J. F. (éds.). (2010). Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Proceedings EIMI Conference. Lisbon, Centro International de Matemática. http://www.cim.pt/files/proceedings_eimi_2010.pdf

Blum, W. et. al. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. Educational Studies in Mathematics, 51(1/2), 149-171.

Damlamian, A. – Straesser, R. (On behalf of the International Program Committee, 2009). ICMI-study 20: educational interfaces between mathematics and industry. L'Enseignement Mathématique, 55, 197-209.

Damlamian, A., Rodrigues, J.F. & Sträßer, R. (éds., à paraître 2012). Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Report on an ICM-ICIAM Study. Berlin-Heidelberg, Springer.

Organisation for Economic Co-operation and Development, Global Science Forum (2008) Report on Mathematics in Industry. http://www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf

ANÁLISIS TEÓRICO DE CONCEPTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL Y SU USO DIDÁCTICO APOYADO EN SITUACIONES DE MODELACIÓN[6]

María Trigueros y Asuman Oktaç

ITAM- México, CINVESTAV- México

Palabras claves. *Algebra Lineal, Teoría APOE, modelación, descomposición genética.*

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados de un proyecto de investigación de largo alcance en el que convergen dos propósitos diferentes. 1) Profundizar en la forma en que los estudiantes universitarios aprenden los conceptos del álgebra lineal para obtener un análisis teórico validado mediante investigación empírica de las construcciones involucradas en los distintos conceptos de álgebra lineal. 2) Investigar si una enseñanza que utiliza modelos conjuntamente con actividades diseñadas con base en los resultados de la investigación anterior favorece la construcción de los conceptos del álgebra lineal.

Las preguntas que guían el proyecto son: ¿Qué construcciones mentales son necesarias para que los estudiantes universitarios construyan los conceptos del álgebra lineal? ¿Es posible introducir conceptos importantes del álgebra lineal mediante el uso de modelos adecuados en situación de clase? ¿Qué papel juegan las actividades basadas en los resultados de la investigación en esta enseñanza?

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

El marco teórico de este estudio es primordialmente la teoría APOE (Asiala et al., 1996; Dubinsky & McDonald, 2001), aunque para la implementación didáctica, esta teoría se complementó con algunos elementos de la teoría Modelos y Modelación (Lesh & English, 2005) que brindan elementos para analizar si los problemas diseñados reúnen las condiciones necesarias para ser exitosos.

El análisis de las construcciones necesarias en el aprendizaje de cada concepto se hizo en términos de descomposiciones genéticas (DG). Las construcciones descritas se analizaron mediante entrevistas para validar o refinar la DG correspondiente (Trigueros & Oktaç, 2005).

A partir de los resultados teóricos se elaboraron actividades para utilizarse en un contexto didáctico conjuntamente con problemas para modelar situaciones que permitieran la introducción de conceptos específicos. El trabajo de los estudiantes, los datos de la observación en clase y los resultados de entrevistas posteriores se analizaron para analizar la propuesta didáctica y el aprendizaje de los alumnos.

---

[6] Los trabajos presentados en este artículo han sido parcialmente financiados por los proyectos Conacyt 41726S y 60763-H.

RESULTADOS

En términos generales, los estudios realizados han dado resultados diversos. Un modelo que ha resultado exitoso ilustra los resultados del proyecto. El problema requiere la modelación de una situación de producción de un grupo de empresas. Los estudiantes deben diseñar un modelo y validarlo mediante un conjunto de datos. Con él se introducen conceptos relacionados con el concepto de base de un espacio vectorial (Trigueros & Possani, 2011).

Los resultados obtenidos de la parte teórica mostraron las dificultades del aprendizaje de estos conceptos (Kú, Trigueros & Oktaç, 2008; Oktaç & Trigueros, 2010, Kú, Oktaç, & Trigueros, 2011): Los estudiantes confunden los conceptos de conjunto generador y base y relacionan ambos conceptos con el de dimensión; la diferenciación de estos conceptos, de acuerdo a la descomposición genética y a los resultados obtenidos, implica un proceso complicado en el que es necesario llevar a cabo varias coordinaciones de diversos procesos en el sentido de la teoría APOE; la interiorización del concepto de base se dificulta debido, en particular, a la falta de una construcción de tipo proceso del concepto de independencia lineal y de conjunto generador, además de las dificultades que encuentran para identificar la pertenencia de los vectores al espacio vectorial dado. Para estos estudiantes, se encontró que resulta más fácil averiguar si un conjunto dado forma una base que encontrar una base para un espacio vectorial dado y que la construcción del concepto base requiere de la posibilidad de trabajar con espacios vectoriales diferentes al espacio vectorial R^n para posibilitar la construcción de un esquema alrededor de este concepto.

El uso conjunto del problema y las actividades diseñadas a partir de los resultados anteriores, permitió analizar el trabajo de los estudiantes. Los estudiantes experimentaron dificultades para seleccionar e interpretar las variables pertinentes y sus relaciones pero convinieron en un modelo para trabajar. Encontraron relaciones y tendencias entre los datos proporcionados. De la comparación de los resultados provenientes de distintos subconjuntos de datos emergió la frase “información redundante”. El maestro introdujo las actividades relacionadas con los conceptos de interés y regresó a la interpretación y solución del problema planteado utilizando los nuevos conceptos.

Los resultados de las entrevistas mostraron que los estudiantes dieron sentido a la independencia lineal en términos de la redundancia en la información y que ello permitió anclar y diferenciar los conceptos relacionados con el de base. La mayor parte de los alumnos mostró una concepción proceso de estos conceptos y uno de ellos mostró una concepción objeto de los mismos.

Todos los estudios del proyecto ponen de manifiesto que el aprendizaje del álgebra lineal requiere de llevar a cabo investigaciones sobrepasen la identificación de las dificultades de los estudiantes. A través de los distintos trabajos del proyecto se puede constatar que el uso de la DG constituye una herramienta para desentrañar las construcciones mentales involucradas en la construcción de distintos conceptos del álgebra lineal. La evidencia de las construcciones predichas permite establecer posibles causas de las dificultades de los alumnos y resultados que no se habían encontrado en investigaciones previas. Las DG han sido de utilidad para el desarrollo de las situaciones didácticas basadas en los resultados de investigación. En términos generales, se ha puesto en evidencia que el uso de modelos proporciona a los alumnos un referente que permite dar un sentido "concreto" a los conceptos abstractos que, al utilizarse como punto de partida para la formalización de los mismos, favorece el aprendizaje.

REFERENCES

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, CBMS Issues in Mathematics Education, **6**, 1-32.

Dubinsky, E. & McDonald, M., (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss and A. Schoenfeld (Eds.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Kú, D., Oktaç, A. & Trigueros, M. (2011). Spanning Set and Span: An analysis of the mental constructions of undergraduate students. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle & M. Oehrtman (Eds.) *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Pp. 176 – 186. http://sigmaa.maa.org/rume/RUME_XIV_Proceedings

Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

Lesh, R. & English, L. (2005). Trends in the evolution of models and modeling perspectives on mathematical learning and problem solving, *ZDM* 37 (6) 487–489.

Oktaç, A & Trigueros, M. (2010).¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 13(4),p 373-385*.

Trigueros, M. & Oktaç A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v. 10, 157 - 176.

Trigueros, M. & Possani, E. (2011). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications.* Elsevier. Electronic Version: DOI 10.1016/j.laa.2011.04.009.

ACCOMPAGNER LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPÉRIEUR : LE CAS DES NOMBRES COMPLEXES

Martine De Vleeschouwer*, Ghislaine Gueudet**, Marie-Pierre Lebaud***

*Unité de support didactique, Université de Namur, **CREAD, IUFM de Bretagne UBO, ***CREAD, Université de Rennes 1

Résumé. Cette contribution concerne les formes de transition qui prennent place au début de l'enseignement supérieur, les difficultés qu'elles engendrent, et les moyens d'y remédier. Elle s'inscrit dans des perspectives portées par Michèle Artigue (2006), de plusieurs manières : nous nous intéressons à de nouvelles formes de flexibilité ; nous adoptons également un point de vue d'action didactique, susceptible de soutenir cette flexibilité, et en particulier à l'apport de certaines technologies. Nous étudions l'enseignement des nombres complexes ; nous avons mis en place, à Rennes (France), et à Namur (Belgique) des dispositifs utilisant la base d'exercices en ligne WIMS (http://wims.unice.fr/wims/) pour accompagner cet enseignement. Nous analysons ces dispositifs et leurs impacts.

Mots-clé : *Flexibilité, Nombres complexes, Ressources en ligne, Transition*

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSITION

Différentes formes de transition prennent place, au début de l'enseignement supérieur (Gueudet 2008, Winsløw 2008). En particulier, quel que soit le contenu mathématique en jeu, on observe la nécessité d'une plus grande flexibilité et d'une plus grande autonomie des étudiants, pour effectuer des changements de cadres, de registres etc. Lorsque l'on considère les nombres complexes, cette nécessité apparaît clairement. Un nombre complexe peut être présenté sous forme algébrique ($z=a+ib$), trigonométrique ($z=r(\cos\theta+ i\sin\theta)$) ou exponentielle ($z=re^{i\theta}$). Il admet par ailleurs différentes interprétations, dans le cadre géométrique : il peut être associé à un point M (image du complexe z, z étant l'affixe de M), à un vecteur u (pour lequel on utilise encore le terme d'affixe). De plus, il peut également être associé à une transformation, caractérisant une similitude directe. Différentes études ont relevé des difficultés associées à ces exigences de flexibilité, notamment en ce qui concerne les représentations géométriques (Nordlander & Nordlander 2011, Panaoura et al. 2006). Notons que ces difficultés n'adviennent pas nécessairement au début de l'université : selon les pays, et les filières, les nombres complexes peuvent être ou non rencontrés dans le secondaire. Dans notre étude, les deux cas sont effectivement présents. De plus, le temps didactique au cours duquel les étudiants rencontrent ces représentations, et le vocabulaire qui y est attaché, est particulièrement bref.

ACCOMPAGNER LA TRANSITION AVEC WIMS, UNIVERSITÉ RENNES 1

Au 1e semestre de la licence MIEE (mathématiques, informatique, électronique, économie) à l'université de Rennes 1 (France), le chapitre sur les complexes est un pré-requis du cours d'analyse. Celui-ci est revu et une nouvelle notion est introduite, les racines énièmes. Les étudiants de cette licence sont issus soit d'une terminale ES (économie), où les nombres complexes ne figurent pas au programme, soit d'une terminale S (scientifique). Dans ce dernier cas, les complexes ont été travaillés dans le cadre de la géométrie plane avec la manipulation des trois écritures et l'étude de quelques transformations géométriques (translation, rotation et homothétie).

Malgré tout, même les étudiants, ayant suivi un cours sur les complexes, rencontrent des difficultés lors de leur première année. Pour pallier ce problème, deux actions ont été mises en place en 2009 dans le cadre du plan « Réussir en Licence »[7] :

- un cours en présentiel, réservé aux étudiants issus de terminale ES, qui se déroule la semaine de pré-rentrée et porte exclusivement sur les complexes ;
- un cours en ligne, préparé par un groupe de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Rennes, ainsi que des feuilles d'exercices disponibles sur un serveur WIMS.

Le choix de cette plate-forme d'exercices permet de répondre à deux spécificités du travail à l'université : l'accélération du temps didactique et une plus grande disponibilité des connaissances (Robert, 1998). D'une part, les thèmes travaillés demandent une certaine technicité que la durée effective des cours ne permet pas toujours d'acquérir. D'autre part, une plus grande flexibilité cognitive est nécessaire : par exemple le passage du registre algébrique au registre géométrique pour les complexes doit devenir naturel chez un étudiant. WIMS propose des exercices avec changements de valeurs numériques dans une même nature de tâche pour le travail de la technicité, ainsi que des exercices explicitant le passage d'un registre à l'autre (de type « tir complexe », Vandebrouck 2006) : les étudiants travaillent ainsi, à leur rythme, avec rétroaction sur leurs réponses. De plus, l'utilisation d'un tel outil en ligne, hors du temps présentiel, est propice au développement de l'autonomie de l'étudiant qui peut ainsi prendre à sa charge une partie de son apprentissage.

ACCOMPAGNER LA TRANSITION AVEC WIMS, UNIVERSITÉ DE NAMUR

Dans cette partie, nous nous intéressons à des sections de sciences de la vie (biologie, géologie, géographie) à l'université de Namur (Belgique). En effet, les étudiants de première année inscrits dans ces sections ont, dans le cours de mathématique de leur cursus, un chapitre consacré aux nombres complexes.

Le programme officiel de l'enseignement secondaire en Belgique prévoit que les nombres complexes doivent être enseignés (sous la forme algébrique et trigonométrique) aux élèves choisissant l'option *mathématiques pour scientifiques*.

---

7 Le plan « Réussir en Licence » a été mis en place par le ministère de l'Éducation Nationale en France pour lutter contre l'échec en première année à l'Université. Il bénéficie d'un financement spécifique.

Pour les autres options, les nombres complexes ne sont pas au programme. Certains étudiants inscrits en première année en sciences de la vie à Namur ont suivi en secondaire l'option *mathématiques pour scientifiques* mais d'autres pas. Précisons toutefois que la forme exponentielle des nombres complexes n'est au programme d'aucun cours de mathématiques dans l'enseignement secondaire belge. Quelle que soit l'option de mathématiques suivie dans l'enseignement secondaire, il y aura donc pour tous les étudiants un enseignement « nouveau » à l'université.

L'accélération du temps didactique étant indéniable à l'Université, il nous a semblé important de mettre des outils d'aide à la disposition des étudiants afin qu'ils puissent répondre, notamment, aux exigences de flexibilité présentes dans la nouvelle institution. Dans cette perspective, avoir recours à WIMS nous a semblé tout indiqué, pour des raisons qui rejoignent celles exposées dans le cas de Rennes ci-dessus. De plus, cette base d'exercices permet un enseignement différentié pour les étudiants qui n'ont jamais été confrontés aux nombres complexes dans l'enseignement secondaire : ils peuvent ainsi se familiariser, directement après le cours théorique et sans véritable limite dans le temps, avec les calculs algébriques et les passages entre les formes algébriques et trigonométriques.

REFERENCES

Artigue, M. (2006). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 11, p. 269 – 288, IREM de Strasbourg.

Gueudet, G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition, *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 237-254.

Nordlander, M.C.; Nordlander, E. (2011) On the concept image of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *online first*

Panaoura, A.; Elia, I.; Gagatsis, A.; Giatilis, G.-P. (2006) Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37 (6) 681-706.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

Vandebrouck, F. (2006). Enseigner autrement les mathématiques en licence de sciences : des exemples utilisant les nouvelles technologies. In N. Bednarz, C. Mary (dir.), *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Actes de colloque EMF 2006 (cédérom). Sherbrooke : Editions du CRP.

Winsløw, C. (2008) Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle, in Rouchier A. et Bloch, I. (dir.) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIII^e^ école d'été de didactique des mathématiques*, CD-Rom. La Pensée Sauvage, Grenoble.